G - Prodotto scalare

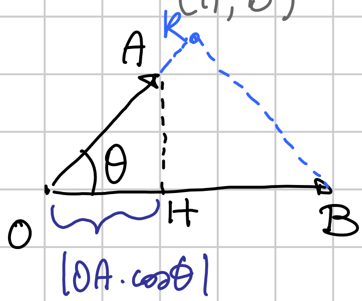
Titolo nota 01/09/2018

Fissata un'origine O e dati due vettori $\vec{A}, \vec{B}$ definiamo il prodotto scalare tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$ come

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos(A\hat{O}B) = \overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(A\hat{O}B)$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$

$(\vec{A}, \vec{B})$

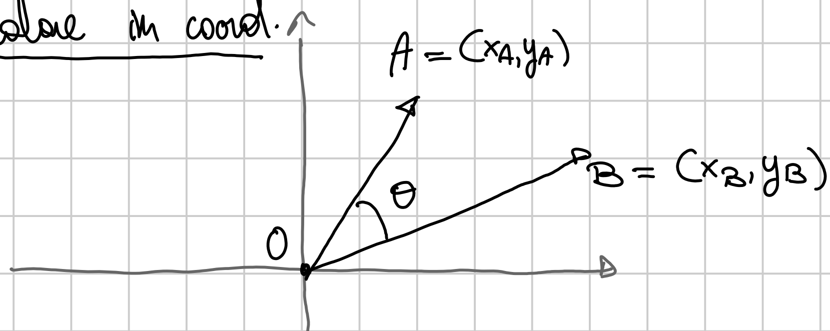


$$|\overline{OA}\cdot\cos\theta| = \overline{OH}$$

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| = \overline{OH}\cdot\overline{OB} = \overline{OK}\cdot\overline{OA}$$

il segno dipende dal verso di $\vec{OK}$ rispetto a $\vec{OA}$
(o dal verso di $\vec{OH}$ rispetto a $\vec{OB}$)

Prodotto scalare in coord.



Teorema di Carnot: $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(A\hat{O}B)$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = \overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(A\hat{O}B) = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2} =$$

$$= \frac{x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{2} = \frac{2x_Ax_B + 2y_Ay_B}{2} = x_Ax_B + y_Ay_B$$

$$\boxed{(x_A, y_A)\cdot(x_B, y_B) = x_A\cdot x_B + y_A\cdot y_B}$$

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cdot\underbrace{|\cos(A\hat{O}B)|}_{\leq 1} \leq |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|$$

$(x_Ax_B + y_Ay_B)^2 \leq (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2)$ disug. di CAUCHY-SCHWARZ

Proprietà del prod. scalare

1) $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ $\qquad \cos(B\hat{O}A)=\cos(-A\hat{O}B)=\cos(A\hat{O}B)$

2) $\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B})=\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B})$

3) $(\vec{A}+\vec{C})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{B}$ $\longrightarrow$

$A=(x_A,y_A)\qquad B=(x_B,y_B)$
$C=(x_C,y_C)$
$\vec{A}+\vec{C}=(x_A+x_C,\,y_A+y_C)$

$$(\vec{A}+\vec{C})\cdot\vec{B}=x_B(x_A+x_C)+y_B(y_A+y_C)=$$
$$=x_Ax_B+x_Cx_B+y_Ay_B+y_Cy_B=$$
$$=\underbrace{x_Ax_B+y_Ay_B}_{\vec{A}\cdot\vec{B}}+\underbrace{x_Cx_B+y_Cy_B}_{\vec{C}\cdot\vec{B}}=$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{B}$$

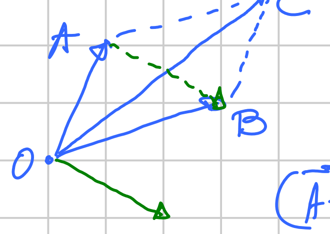
4) $\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2\cdot\cos(A\hat{O}A)=|\vec{A}|^2$

5) $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$
$$\Updownarrow$$
$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(A\hat{O}B)=0$$
$$\Downarrow$$
$\overline{OA}=0$ oppure $\overline{OB}=0$ oppure $\cos(A\hat{O}B)=0$
(cioè $A\hat{O}B=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$)

il prod scalare è nullo se uno dei due vettori è nullo o se i due vettori sono perpendicolari.

Es: $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{B}$
$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}-2\vec{A}\cdot\vec{B}$
$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=\vec{A}\cdot\vec{A}-\vec{B}\cdot\vec{B}$

Oss:



$\vec{A}+\vec{B}$ e $\vec{A}-\vec{B}$ sono perpendicolari se e solo se lo sono i segmenti OC e AB

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=0 \iff |\vec{A}|^2=|\vec{B}|^2 \iff \overline{OA}=\overline{OB}$

Es: ABC triangolo, O circocentro, H ortocentro.
Se O è l'origine, allora $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.

dim: $\vec{K}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ se dimostro che $AK\perp BC$ e $BK\perp AC$ ho finito.

$AK\perp BC \iff (\vec{K}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{B})=0$

$$(\vec{B}+\vec{C})\cdot(\vec{C}-\vec{B})=0 \iff |\vec{C}|=|\vec{B}|$$
$$\overline{OC}=R=\overline{OB}.$$

Allo stesso modo $BK \perp AC \Rightarrow K \equiv H$ e ho finito. $\blacksquare$

Oss: $\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$

$\Rightarrow$ Con l'origine in O, $\vec{H} = 3\vec{G} \Rightarrow O, G, H$ allineati su questa retta e $OG = \frac{1}{3}OH$.