Geometria - prodotto scalare

Nota: In alcuni esercizi sarà necessario scegliere opportunamente l'origine.

Esercizio 1. Determinare, in funzione di $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, il vettore $\vec{N}$, dove N è il centro della circonferenza dei nove punti del triangolo ABC.

Esercizio 2. Sia ABC un triangolo; determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ (in funzione dei lati di ABC) tale che il $\vec{P} = \lambda\vec{A} + (1-\lambda)\vec{B}$ sia il piede dell'altezza da C. (*Hint:* richiedere che $\langle \vec{P} - \vec{C}, \vec{A} - \vec{B} \rangle = 0$.)

Esercizio 3. Determinare, in funzione di $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, il vettore $\vec{H}'$, dove H' è il simmetrico di H rispetto al punto medio di AB.

Esercizio 4. Utilizzando l'esercizio precedente, mostrare che H' sta sulla circonferenza circoscritta.

Esercizio 5. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O; siano H_A, H_B, H_C, H_D gli ortocentri di BCD, CDA, DAB, ABC rispettivamente.

1. Esprimere i vettori $\vec{H}_A$, $\vec{H}_B$, $\vec{H}_C$, $\vec{H}_D$ in termini dei vettori $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$.
2. Mostrare che esiste un vettore $\vec{X}$ tale che $\vec{H}_A = \vec{A} + \vec{X}$ e così via.
3. Concludere che anche il quadrilatero $H_AH_BH_CH_D$ è inscrittibile e determinare il centro della sua circonferenza circoscritta.

Esercizio 6. Dati 4 punti distinti A, B, C, D, dimostrare che AB e CD sono perpendicolari se e solo se $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BD^2$.

Esercizio 7. Dimostrare che, se H è l'ortocentro di ABC, allora A è l'ortocentro di HBC.

Esercizio 8. Sia ABC un triangolo. Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che $k(\vec{A} + \vec{B})$ sia il punto medio dell'arco AB che non contiene C.

Esercizio 9. Sia ABC un triangolo. Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che $k(\vec{A} + \vec{B})$ sia il punto di intersezione delle tangenti alla circoscritta in A e B.