

P - CASSETTI

Titolo nota

01/09/2018

Se ho $n+1$ oggetti e ho n "cassetti" (insiemi di questi oggetti), e ogni oggetto appartiene ad un cassetto, esiste un cassetto con almeno 2 oggetti

Esempio Un gruppo di n^2 persone, alcune coppie si conoscono (\rightsquigarrow grafi).

Tesi: ci sono due persone con lo stesso numero di conoscenze.

(conoscenze sempre reciproche, nessuno conosce se stesso)

Ogni persona può conoscere $0, 1, 2, \dots, n-1$ persone

CASSETTO 1 : conoscere 1 persona

CASSETTO 2 : conoscere 2 persone

⋮

$n-2$: \dots , $n-2$ persone

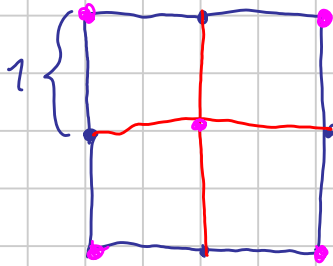
CASSETTO $n-1$: conoscere tutti gli altri oppure non conoscere nessuno

\rightsquigarrow Esistono due persone nello stesso cassetto

Se ci sono due persone nel cassetto $n-1$

o entrambi conoscono tutti, o entrambi nessuno

Esempio Quadrato di lato 2, scegliamo 5 punti su di esso. Allora ne esistono 2 a distanza $\leq \sqrt{2}$



diviso in 4 quadrati 1×1
esistono 2 punti sullo stesso
quadrato 1×1 , quindi a
distanza $\leq \sqrt{2}$

Numeri interi da 1 a $2n$, ne selezioniamo $n+1$.

Allora ne esistono 2 diversi uno multiplo dell'altro.

DIM Ogni intero positivo k si può scrivere come $2^h \cdot d$ con $h \geq 0$ e d dispari.

I cassetti sono i numeri dispari da 1 a $2n-1$

\rightarrow abbiamo n cassetti \rightarrow ci sono due numeri, tra quelli selezionati, nello stesso cassetto

$$2^\alpha \cdot d, 2^\beta \cdot d \quad \text{con } \alpha \neq \beta$$

$\alpha < \beta$ il primo divide il secondo, altrimenti il secondo divide il primo

OSS Se seleziono solo n numeri (ad esempio $n+1, n+2, \dots, 2n$) non è detto che ce ne siano

due uno divisore dell'altro.

Generalizzazione Se ho $(k+1)$ oggetti e n cassetti, allora ho almeno un cassetto con almeno $k+1$ oggetti

Esempio Una targa è una sequenza di 6 cifre decimali. Vogliamo produrre targhe tali che ogni coppia di targhe ha almeno 2 posizioni con cifre diverse. Quante targhe al massimo? $10^5 = 100.000$.

DIM che non possiamo produrne 100.001 Per assurdo selezioniamo 100.001 targhe

OSS 1 Ci sono 10.001 targhe tutte con una stessa cifra $c_1 \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ in prima posizione

OSS 2 Ci sono tra queste 10.001 targhe, almeno 1.001 con una stessa seconda cifra c_2

OSS 3 Ci sono 101 targhe con le prime 3 cifre uguali, 11 con le prime 4 cifre uguali, e quindi 2 con le prime 5 cifre uguali, assurdo!

Esempio con 10^5 targhe: Prendo le 10^5 targhe della forma $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$, con $c_i \in \{0, \dots, 9\}$

che soddisfanno $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 \equiv 0 \pmod{10}$

Se $c_1 \neq c_1'$ ma $c_2 = c_2'$, $c_3 = c_3'$... $c_6 = c_6'$

$$c_1 + \dots + c_6 \not\equiv c_1' + \dots + c_6'$$