

Preliminari - principio di induzione - 1

Esercizio 1. Dimostrare che la somma dei cubi dei numeri da 1 a n è

$$\frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2).$$

Esercizio 2. Dimostrare che la somma delle quarte potenze dei numeri da 1 a n è

$$\frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

Esercizio 3. Dimostrare che $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = n(3n - 1)/2$.

Esercizio 4. Dimostrare che $n^2 \leq 2^n$ se $n \geq 4$.

Esercizio 5. Trovare n_0 intero tale che $2^n \leq n!$ per ogni $n \geq n_0$.

Esercizio 6. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ e per ogni n naturale, si ha

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Esercizio 7. Dimostrare che ogni numero intero positivo è somma di numeri di Fibonacci non consecutivi.

Esercizio 8. Dimostrare che

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \leq 4^n.$$

Esercizio 9. Dimostrare che

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

Esercizio 10. Dimostrare che è sempre possibile tassellare una griglia $2^n \times 2^n$ con una casella rimossa con trimini ad L .

Esercizio 11. Sia $a_0 = 1$ e definiamo $a_n = \sqrt{1 + 2a_{n-1}}$ per $n \geq 1$. Dimostrare che $a_n < 4$ per $n \geq 1$.