P - INDUZIONE 1

Titolo nota 01/09/2018

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$p(n)$ è una proposizione che parla del numero $n \in \mathbb{N}$

1. dimostriamo che $p(0)$ è vera
2. Per ogni numero $K \in \mathbb{N}$ assumendo che $p(K)$ è vera, dimostriamo che $p(K+1)$ è vera

allora $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Esempio: "la somma dei numeri da 0 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$" $p(n)$

1. $p(0)$ è vera? $0 =$ somma dei naturali da 0 a 0 $\frac{0 \cdot 1}{2} = 0$

2. $p(K+1)$ dice che $\sum_{i=0}^{K+1} i = \frac{(K+1)(K+1+1)}{2}$

Sappiamo già che $\boxed{\sum_{i=0}^{K} i = \frac{K(K+1)}{2}}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \boxed{\left(\sum_{i=0}^{k} i\right)} + (k+1) \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=} \boxed{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) =$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

<u>Esempio</u> $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

① $\displaystyle\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$

② Supponiamo che per un certo $k \in \mathbb{N}$ valga $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right]$$

$$= (k+1)\left[\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right] = \frac{(k+1)\cdot(k+1+1)\cdot(2(k+1)+1)}{6}$$

Esempio x numero reale, $x \neq 0$. Supponiamo che $x + \frac{1}{x}$ è un numero razionale.

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $x^n + \frac{1}{x^n}$ è razionale

1. $n = 0$ $\qquad x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Q}$

2. $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Q}$ sapendo che $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Q}$

$$\underbrace{\boxed{\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)}}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\boxed{x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}}}_{\text{vorremmo } \in \mathbb{Q}} + \boxed{x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}}$$

Induzione estesa

Se valgono le seguenti

1. $p(0)$ è vera

2. Per ogni k, assumendo che $p(0), p(1) \dots, p(k)$ sono vere, allora anche $p(k+1)$ è vera

Allora $p(n)$ è vera per ogni n

$$\underbrace{\boxed{\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)}}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{\boxed{\left(x + \frac{1}{x}\right)}}_{\in \mathbb{Q}} = \underbrace{\boxed{x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}}}_{\text{vorremmo } \in \mathbb{Q}} + \underbrace{\boxed{x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}}}_{\in \mathbb{Q}}$$

perché è un
caso precedente

$p(0)$ vera

Dobbiamo verificare anche $p(1)$ a mano

$p(1)$ $\quad x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$ per fortuna è un'ipotesi del problema

Da $p(2)$ in poi usiamo l'argomento sopra