

Preliminari - principio di induzione - 2

Esercizio 1. Sia F_n l' n -esimo numero di Fibonacci. Determinare $n_0 \geq 0$ tale che $F_n \geq n^3$ per ogni $n \geq n_0$.

Esercizio 2. Dimostrare che

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Esercizio 3. Dimostrare che

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2.$$

Esercizio 4. Siano n, m due interi positivi con $n > m$. Dimostrare che

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(m + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Esercizio 5. Dimostrare che, se $n \geq 2$, allora $\sqrt[n]{n} < 2 - \frac{1}{n}$.

Esercizio 6. Supponiamo di avere dei numeri reali a_1, a_2, \dots, a_n tali che

$$\sum_{k=1}^m a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^m a_k\right)^2$$

per ogni $m = 1, \dots, n$. Dimostrare che $a_k = k$ per ogni $k = 1, \dots, n$.