P - INDUZIONE 2

Titolo nota 01/09/2018

Fibonacci

$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ per $k \geq 1$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$

Errore comune: passo base insufficiente

Teo (Falso) Ogni F_n è pari

DIM Passo base $n=0$ $\quad F_0 = 0$ è pari

Passo induttivo $\underbrace{F_{k+1}}_{\text{pari}} = \underbrace{F_k}_{\text{pari}} + \underbrace{F_{k-1}}_{\text{pari}}$ perché

$k-1, k < k+1$

Ma per $k=0$, F_1 è definito come 1

e non come $F_0 + F_{-1}$ non esiste

Esempio $\underbrace{F_n \geq \frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1} i \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}}_{\text{vedremo che non è vero}}$

$n=0 \qquad F_0 = 0 \qquad \frac{0(-1)}{2} = 0$ ✓

$n=1 \qquad F_1 = 1 \qquad \frac{1 \cdot 0}{2} = 0$ ✓

$n = 2 \qquad F_2 = 1 \qquad \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ ✓

$$F_k \geq \frac{k \cdot (k-1)}{2} \quad \text{per} \quad k \geq 3$$

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \geq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + F_{k-2} \overset{?}{\geq} \frac{k(k-1)}{2}$$

Basterebbe dimostrare $F_{k-2} \geq k-1$ per $k \geq 3$

$k=3 \qquad F_{3-2} = F_1 = 1 \quad$ ma $\quad 3 - 1 = 2$ ✗

$k-1$	2,	3	, 4	, 5	, 6	, $\boxed{7}$
F_{k-2}	1	1	2	3	5	, $\boxed{8}$ F_6

Proviamo a dim. che $F_{k-2} \geq k-1$ per $k \geq 8$

P.B. $\quad \overset{k=8}{F_6 \geq 7}$ ✓

P.I. $k+1 \qquad F_{k-1} = F_{k-2} + F_{k-3} \geq k - 1 + 1$ ✓

Perché $F_{k-3} \geq 1$ per $k \geq 8$

Allora • passo base funziona $k = 0, 1, 2$

• passo induttivo funziona da $k=8$ in poi

Non posso concludere che da $k=8$ in poi vale la tesi

$K=8 \quad F_8 = 21 \quad \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ non va bene come passo base!

$K=9 \quad F_9 = 34 \quad \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ ancora non va bene ...

$K=10 \quad F_{10} = 55 \quad \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ ✓

Correggiamo: Per $K \geq 10$, $\underbrace{F_K \geq \frac{K(K-1)}{2}}_{\text{stavolta è vera}}$

DIM P.B. $K=10$ ✓

P.I $F_{K+1} = F_K + F_{K-1} \geq \frac{K(K-1)}{2} + K = \frac{(K+1)K}{2}$

$F_{K-1} \geq K$ perché $K \geq 10 > 8$

Teo (Sylvester) vero Abbiamo $n \geq 3$ punti nel piano. Per ogni coppia P, Q punti tra gli n, sulla retta PQ c'è almeno un R punto della collezione.

Tesi: tutti i punti sono allineati

DIM Falsa Prendo un insieme di n punti del piano + uno aggiuntivo $\{P_1, \dots P_n\} \cup \{P_{n+1}\}$

P_i, P_j con $i,j \leq n$ sulla retta P_iP_j $\boxed{\text{c'è un } P_K}$ ma con quale K?

$P_1 \dots P_n$ sono tutti allineati su una retta r per ipotesi induttiva

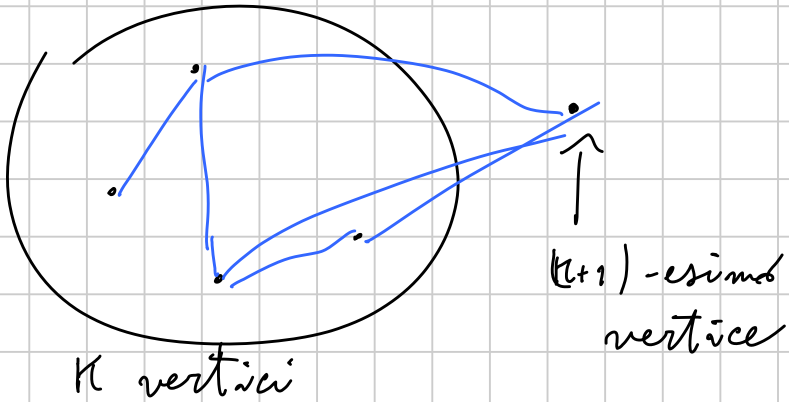
$P_1 P_{n+1}$ contiene P_K per $K \neq 1, n+1$, ma allora

$P_1 P_{n+1}$ è la retta r

P.B $n=3$ P_1, P_2, P_3 $P_1 P_2$ contiene P_3

Nel caso generale il mio insieme di $n+1$ punti che soddisfa l'ipotesi non si ottiene aggiungendo un punto a un insieme di n punti che soddisfa l'ipotesi

$\boxed{n = k+1}$ P. induttivo



questo è
connesso perché è un grafo su k vertici

il (k+1)-vertice ha almeno un arco che lo collega al resto del mondo $\Rightarrow$ tutto il grafo è connesso

Ma non ho verificato che ogni vertice nei primi k ha un arco <u>interno ai primi k</u>