C - CONTEGGI 1

Titolo nota 02/09/2018

Quanti sono?

Regola della somma e del prodotto

scelte alternative

scelte compatibili e indipendenti

Esempio del menú. Al ristorante ci sono 3 antipasti, 4 primi, 5 secondi e 6 contorni.

- In quanti modi ordinare un menú completo?

  $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

- Menú ridotto: antipasto + primo, oppure secondo + contorno.

  Quanti menú ridotti? $3 \cdot 4 + 5 \cdot 6$

Insieme delle parti A un insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$|A| = n$. $\mathcal{P}(A) = \{B$ sottoinsiemi di A, cioè $B \subseteq A\}$

cardinalità

$|\mathcal{P}(A)| = ?$

Per scegliere $B \subseteq A$, occorre effettuare una scelta per ogni a_i: lo metto in B oppure no? Per ogni a_i ho 2 possibilità. Le scelte sono indipendenti

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ fattori, corrispondenti alle } n \text{ scelte}} = 2^n = |\mathcal{P}(A)|$$

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1 \dots b_m\}$ $m, n > 0$

Quante sono le funzioni da A a B?

Una funzione $F: A \to B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A un elemento di B: quindi per ogni a_i, F mi sceglie un elemento $b_j = F(a_i) \in B$. A diversi a_i può essere associato lo stesso b_j.

Allora devo scegliere in $m = |B|$ modi l'elemento $F(a_1)$; indip. devo scegliere $F(a_2)$ in m modi, e così via, $\forall a_i$ devo scegliere $F(a_i)$ l'immagine di a_i dentro B tramite F.

Ci sono m^n funzioni da A a B

OSS Scegliere un sottoinsieme di A è equivalente a scegliere una funzione da $A \xrightarrow{F} \{0, 1\}$: scegliere F equivale a scegliere quali elementi di A finiscono in 1 (è un sottoinsieme di A), il resto degli elementi finisce in 0 per forza!

Quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi di A? *

$\{a_i, a_j\} \subseteq A$ $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq n$

Coppia ordinata di elementi di A.

Prodotto cartesiano

- $A \times A = \{ (a_i, a_j) \text{ con } 1 \leq i \leq n \quad 1 \leq j \leq n \}$.

  $|A \times A| = n^2$.

- Quante sono le coppie ordinate con elementi diversi tra loro? * In $A \times A$ ci sono n^2 coppie, ma n di esse, ossia $(a_1, a_1), (a_2, a_2) \dots (a_n, a_n)$ hanno elementi uguali! Le altre hanno el. diversi

* $n^2 - n$

- * $\frac{n^2 - n}{2}$ perché ogni sottoinsieme $\{a_i, a_j\}$ corrisponde a due coppie ordinate di elementi diversi di A.

Funzioni iniettive $f: A \to B$

Se prendo due el. distinti $a_i \neq a_j$, può capitare comunque che $f(a_i) = f(a_j)$. Diciamo che f è <u>iniettiva</u> se questo non capita: $f(a_i) \neq f(a_j)$ sempre, $\forall a_i \neq a_j$.

<u>OSS</u> $A = \{a, \dots a_n\}$ $B = \{b_1 \dots b_m\}$

Se $n > m$ non ci sono f iniettive $: A \to B$!

$\boxed{n \leq m}$ Quante sono le funzioni iniettive $f: A \to B$? *

Devo scegliere $f(a_1)$ in m modi. A questo punto

- La scelta di $f(a_2)$ <u>non</u> è indipendente: devo evitare di scegliere lo stesso elemento di nuovo!
- Tuttavia, indip. dalla scelta di $f(a_1)$, sono

rimaste $(m-1)$ possibilità per scegliere $f(a_2)$

Devo scegliere $f(a_3)$: sono rimaste $(m-2)$ possibilità

$$\overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}^{n \text{ fattori, corrispondenti alle } n \text{ scelte.}}$$

Caso particolare : $m=n$: in questo caso una funzione iniettiva $f: A \to B$ è obbligata ad usare tutti gli elementi di B almeno una volta.

Diciamo che $f: A \to B$ è suriettiva se f usa tutti gli elementi di B (serve $n \geq m$)

Iniettiva + suriettiva = bigettiva.

Fatto ovvio se $n=m$, $f: A \to B$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Se $m=n$, ci sono $\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}_{}$ funzioni bigettive da A a B.

$m!$ "m fattoriale"