C - CONTEGGI 2

Titolo nota 02/09/2018

Coefficienti binomiali

$n > 0$

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$

$0 \le k \le n$. Quanti sono i $B \subseteq A$ con $|B| = k$?

$\binom{n}{k}$ "n su k" è il nome della risposta.

$\boxed{k = 0}$ $B = \emptyset$ $\binom{n}{0} = 1$

$\boxed{k = n}$ $B = A$ $\binom{n}{n} = 1$

k e k' con $k + k' = n$, allora $\binom{n}{k} = \binom{n}{k'}$

Infatti ogni sott. di k elementi ha un complementare di k' elementi

$$\binom{n}{k} \overset{*}{=} \frac{n!}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$*$ Scegliere k elementi di A è circa equivalente a scegliere una funzione iniettiva da $\{1, \dots k\} \to A$. Più precisamente possiamo scegliere con la seguente strategia una $F : \{1, \dots k\} \to A$ iniettiva

- Scegliamo l'immagine $B \subseteq A$ della funzione, con $|B| = k$. Abbiamo $\binom{n}{k}$ possibilità.

- Scegliere una bigezione tra $\{1, \dots k\}$ e B.

Finiettiva si ottiene $\{1, \dots k\} \xrightarrow[\text{bigezione scelta}]{} B \xhookrightarrow[\text{inclusione}]{} A$

$\rightarrow$ ci sono $\binom{n}{k} \cdot k!$ funzioni iniettive da $\{1, \dots k\}$ ad A

Ma sono $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad *$$

$(x+y)^n$ è una somma di monomi in x e y.

Quali coefficienti?

$$(x+y) \cdot (x+y) \cdot \dots \cdot (x+y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot y^{n-k}$$

$$a_k = \binom{n}{k}$$. Sostituisco $x = y = 1$

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$

Ricorrenza dei binomiali

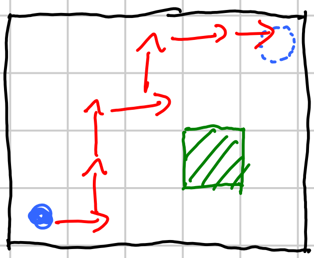
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad k > 0,\ n \geq k$$

Infatti $A' = \{a_1, \dots, a_n, \alpha\}$ $\qquad |A'| = n+1$

voglio scegliere k elementi dentro A'

ho due alternative

- Scelgo anche α tra i k elementi
  gli altri $(k-1)$ tra i restanti n $\rightsquigarrow \binom{n}{k-1}$
- scelgo tutti i k elementi tra i primi n
  $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$



Quanti percorsi da SO a NE con passi di tipo $\rightarrow$ e $\uparrow$ che evitano ?

Idea Risolviamo il problema fregandocene di

- dovrà compiere 7 passi, di cui 3 $\uparrow$ e 4 $\rightarrow$.

Possiamo scegliere in che ordine compaiono questi passi.

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 35$$

percorsi possibili.

I percorsi vietati sono $\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1} = 4\cdot 3 = 12$

$$35 - 12 = 23$$