G - Distanze tra punti notevoli

Titolo nota 28/10/2018

Osservazione: Se poniamo l'origine in O (= circocentro di ABC) allora

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

Notazione standard: $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$.
R = raggio della circoscritta
r = raggio dell'inscritta

dim: $|\vec{A} - \vec{B}|^2 = \langle \vec{A} - \vec{B}, \vec{A} - \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle - 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$

$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = c^2$ $\qquad$ $|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 = R^2$ (perché l'origine è nel circocentro).

$$\Rightarrow \quad c^2 = 2R^2 - 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \Rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = R^2 - \frac{c^2}{2}. \quad \square$$

Oss: $\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle = R^2 - \frac{a^2}{2}$, $\langle \vec{C}, \vec{A} \rangle = R^2 - \frac{b^2}{2}$

Distanza $\overline{OH}$ (circocentro - ortocentro)

Con l'origine in O, $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, quindi

$$\overline{OH}^2 = |\vec{H}|^2 = \langle \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}, \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \rangle = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + |\vec{C}|^2 + 2\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + 2\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle + 2\langle \vec{C}, \vec{A} \rangle =$$

$$= 3R^2 + 2R^2 - c^2 + 2R^2 - b^2 + 2R^2 - a^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Distanza $\overline{OG}$ (circocentro - baricentro)

Sappiamo che $\vec{G} = \frac{1}{3}\vec{H} \Rightarrow \overline{OG}^2 = \frac{1}{9}\overline{OH}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

In generale, così si trovano le distanze tra punti sulla retta retta di Eulero.

Distanza OI (circocentro – incentro)

Espressione vettoriale di I

$$\vec{I} = \frac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}$$

(origine dove volete voi)

(dimostriamo dopo)

Poniamo l'origine in O.

$$\overline{OI}^2 = |\vec{I}|^2 = \frac{1}{(a+b+c)^2} \langle a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}, a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} \rangle =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\Big(|a\vec{A}|^2 + |b\vec{B}|^2 + |c\vec{C}|^2 + 2ab\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle + 2bc\langle \vec{B}, \vec{C}\rangle + 2ac\langle \vec{A}, \vec{C}\rangle \Big) =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\Big(a^2R^2 + b^2R^2 + c^2R^2 + ab(2R^2 - c^2) + bc(2R^2 - a^2) + ac(2R^2 - b^2)\Big) =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\Big(R^2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) - abc(a+b+c)\Big) =$$

$$= R^2 - \frac{abc}{a+b+c} =$$

$$= R^2 - 2Rr$$

$$abc = 4R \cdot \text{Area}(ABC) = 4R \cdot r \cdot \frac{(a+b+c)}{2} = 2R \cdot r\,(a+b+c)$$

Lemma: Se P è interno al segmento AB e $\frac{AP}{PB} = k > 0$, allora

$$\vec{P} = \frac{1}{1+k}\vec{A} + \frac{k}{1+k}\vec{B}$$

dim: Sappiamo già che P sta sulla retta AB, poiché è della forma $\lambda\vec{A} + (1-\lambda)\vec{B}$.

Inoltre $\vec{P}-\vec{A} = \frac{k}{1+k}(\vec{B}-\vec{A})$ e $\frac{k}{1+k} > 0$

$\Rightarrow$ B e P stanno dalla stessa parte rispetto ad A.

Allo stesso modo $\vec{P}-\vec{B} = \frac{1}{1+k}(\vec{A}-\vec{B})$ e $\frac{1}{1+k} > 0$;

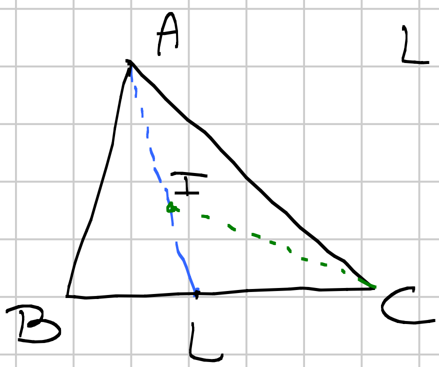
$\Rightarrow$ A e P stanno dalla stessa parte rispetto a B.

$\Rightarrow$ P sta nel segmento AB.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{|\vec{P}-\vec{A}|}{|\vec{P}-\vec{B}|} = \frac{\frac{k}{\cancel{1+k}}\cancel{|\vec{B}-\vec{A}|}}{\frac{1}{\cancel{1+k}}\cancel{|\vec{A}-\vec{B}|}} = k. \qquad \square$$

$$k>0 \Rightarrow k \neq -1$$

Troviamo l'espressione di $\vec{I}$



L sta nel segmento BC e $\boxed{\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}} = k$

$$\frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}} = \frac{b}{c+b}$$

$$\frac{k}{1+k} = \frac{c/b}{1+\frac{c}{b}} = \frac{c}{c+b}$$

$+$

$BL + LC = a$

$\Downarrow$

$LC = \frac{ab}{b+c}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{b}{c+b}\vec{B} + \frac{c}{c+b}\vec{C}$$

I sta nel segmento AL e $\frac{AI}{IL} = \frac{AC}{CL} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$

$$\Rightarrow \vec{I} = \frac{a\vec{A}}{a+b+c} + \frac{(b+c)\vec{L}}{a+b+c} = \frac{a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C}}{a+b+c}.$$