

TdN - EQUAZIONI DIOFANTEE LINEARI

Titolo nota

02/09/2018

Equazione diofantea

Esempio: soluzioni intere di $5x + 17y + z^2 = 43$

Equazioni diofantee lineari (in due variabili)

$$ax + by = c$$

dove a, b, c sono numeri interi dati
e x, y sono numeri interi incogniti.

Esempio: $5x + 3y = 1$

1. Ci sono soluzioni?
2. Trovare (almeno) una soluzione
3. Trovare tutte le soluzioni (x, y)

$$x = 2, y = -3$$

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1$$

$$x = -1, y = 2$$

$$5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1$$

Supponiamo che $a, b \neq 0$.

1. Teorema di Bézout

L'equazione $ax + by = c$ ammette (almeno una) soluzione se e solo se $\text{MCD}(a, b) \mid c$.

- Se c'è una soluzione, allora deve valere $\text{MCD}(a, b) \mid c$

$$ax + by = c$$

$$d \mid a, d \mid b$$

$$\Downarrow$$
$$d \mid ax + by = c$$

Esempio: $6x + 4y = 5$

Impossibile,
perché 5 non può essere
somma di due numeri pari.

- Se $\text{MCD}(a, b) \mid c$, allora c'è (almeno)
una soluzione ...



2

Data

$$ax + by = c$$

con $\text{MCD}(a, b) \mid c$,

costruiamo una coppia (x, y) soluzione.

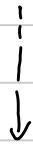
$d \mid a, d \mid b, d \mid c \implies$ dividiamo tutto per d

Esempio $\cancel{6}x + \cancel{4}y = \cancel{5}$
 $3x + 2y = 1$

Da adesso in poi, annuniamo che $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio

$$44x + 13y = 3$$



Momentaneamente lavoriamo sull'equazione $ax + by = 1$

$$44x + 13y = 1$$

Algoritmo di Euclide esteso

$$\begin{aligned} 44 &= 13 \cdot 3 + 5 && \text{quoziente} && \text{resto} \\ 13 &= 5 \cdot 2 + 3 \\ 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

$\text{MCD}(44, 13)$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ &= (13 - 5 \cdot 2) \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ &= 13 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \\ &= 13 \cdot 2 - (44 - 13 \cdot 3) \cdot 5 \\ &= 13 \cdot 17 - 44 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44x + 13y &= 1 \\ 1 &= 13 \cdot 17 - 44 \cdot 5 \end{aligned}$$

Abbiamo trovato la soluzione $x = -5$
 $y = 17$

... Noi volevamo risolvere $44x + 13y = 3$
 \Rightarrow una soluzione è $x = -5 \cdot 3 = -15$
 $y = 17 \cdot 3 = 51$.

③ Abbiamo trovato una soluzione (\bar{x}, \bar{y}) ad $ax + by = c$ (con $\text{MCD}(a, b) = 1$).
Come troviamo tutte le soluzioni?

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a\bar{x} + b\bar{y} &= c \\ \hline a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(x - \bar{x}) &= -b(y - \bar{y}) \\ x - \bar{x} &= k \cdot b \\ \Rightarrow a \cdot k &= -b(y - \bar{y}) \end{aligned}$$

$$y - \bar{y} = -k \cdot a$$

Le soluzioni sono fatte così:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + k \cdot b \\ y = \bar{y} - k \cdot a \end{cases}$$

dove k è un qualsiasi numero intero

Esempio : $44x + 13y = 3$

$$\bar{x} = -15$$

$$\bar{y} = 51$$

---->

$$\boxed{\begin{cases} x = -15 + 13k \\ y = 51 - 44k \end{cases}}$$

Per $k=0$ troviamo la "soluzione base"
 \bar{x}, \bar{y}

Per $k=1$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$

...

Esercizio

Trovare tutti i numeri interi x per cui $3x+5$ è multiplo di 17.

$$3x+5 = 17y$$

dove y deve essere intero

$$17y - 3x = 5$$

$$17 = 3 \cdot 5 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1$$

$$= 3 - (17 - 3 \cdot 5) = 3 \cdot 6 - 17$$

$$3 \cdot 6 - 17 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = -30 \\ \bar{y} = -5 \end{cases}$$

$$x = -30 + 17k$$

$$y = -5 + 3k$$

$$17(-5+3k) - 3(-30+17k) = -17 \cdot 5 + \cancel{51k} + 3 \cdot 30 - \cancel{51k} = 5$$