TdN – EQUAZIONI DIOFANTEE LINEARI

- Equazione diofantea

  Esempio: soluzioni intere di $5^x + 17y + z^2 = 43$

- Equazioni diofantee lineari (in due variabili)

$$ax + by = c$$

dove a, b, c sono numeri interi dati e x, y sono numeri interi incogniti.

Esempio: $5x + 3y = 1$

$x = 2,\ y = -3$ $\quad 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1$

$x = -1,\ y = 2$ $\quad 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1$

1. Ci sono soluzioni?
2. Trovare (almeno) una soluzione
3. Trovare tutte le soluzioni (x, y)

Supponiamo che $a, b \neq 0$.

1 **Teorema di Bézout** L'equazione $ax + by = c$ ammette (almeno una) soluzione se e solo se $MCD(a,b) \mid c$.

- Se c'è una soluzione, allora deve valere $\underbrace{MCD(a,b)}_{d} \mid c$

$$ax + by = c$$

$$d \mid a, \quad d \mid b$$

$$\Downarrow$$

$$d \mid ax + by = c$$

Esempio: $6x + 4y = 5$ Impossibile, perché 5 non può essere somma di due numeri pari.

- Se $MCD(a,b) \mid c$, allora c'è (almeno) una soluzione ...

2 Data $ax + by = c$ con $\overbrace{MCD(a,b)}^{d} \mid c$, costruiamo una coppia (x, y) soluzione.

$d \mid a,\ d \mid b,\ d \mid c$ $\dashrightarrow$ dividiamo tutto per d

Esempio $\cancel{6}x + \cancel{4}y = \cancel{2}$

$3x + 2y = 1$

Da adesso in poi, assumiamo che $MCD(a,b) = 1$.

Esempio $\quad 44x + 13y = 3$

$\downarrow$ Momentaneamente lavoriamo sull'equazione $ax+by = 1$

$$44x + 13y = 1$$

Algoritmo di Euclide esteso

quoziente, resto

$$44 = 13 \cdot 3 + 5$$
$$13 = 5 \cdot 2 + 3$$
$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$MCD(44,13) \longrightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (5 - 3\cdot 1)\cdot 1 = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ &= (13 - 5\cdot 2)\cdot 2 - 5 \cdot 1 \\ &= 13 \cdot 2 - 5 \cdot 5 \\ &= 13 \cdot 2 - (44 - 13 \cdot 3)\cdot 5 \\ &= 13 \cdot 17 - 44 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$44x + 13y = 1$$

$$1 = 13 \cdot 17 - 44 \cdot 5$$

Abbiamo trovato la soluzione $\begin{array}{l} x = -5 \\ y = 17 \end{array}$

... Noi volevamo risolvere $44x + 13y = 3$

$\Rightarrow$ una soluzione è $\begin{array}{l} x = -5 \cdot 3 = -15 \\ y = 17 \cdot 3 = 51. \end{array}$

③ Abbiamo trovato una soluzione $(\bar{x},\bar{y})$ ad $ax+by=c$ (con $MCD(a,b) = 1$).
Come troviamo tutte le soluzioni?

$$ax + by = c$$
$$a\bar{x} + b\bar{y} = c$$

$$a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) = 0$$

$$a(x-\bar{x}) = -b(y-\bar{y})$$

$$x - \bar{x} = k \cdot b$$

$$\Rightarrow a \cdot k \cdot \cancel{b} = -\cancel{b}(y-\bar{y})$$

$$y - \bar{y} = -k \cdot a$$

Le soluzioni sono fatte così:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + k \cdot b \\ y = \bar{y} - k \cdot a \end{cases}$$

dove k è un qualsiasi numero intero

Esempio: $44x + 13y = 3$

$\bar{x} = -15$

$\bar{y} = 51$

$$\dashrightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -15 + 13k \\ y = 51 - 44k \end{matrix}}$$

Per $k = 0$ troviamo la "soluzione base" $\bar{x}, \bar{y}$

Per $k = 1$ $\quad x = -2$, $y = 7$

...

Esercizio: Trovare tutti i numeri interi x per cui $3x + 5$ è multiplo di 17.

$3x + 5 = 17y$ dove y deve essere intero

$17y - 3x = 5$

$17 = 3 \cdot 5 + 2$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (17 - 3 \cdot 5) = 3 \cdot 6 - 17$$

$$3 \cdot 6 - 17 \cdot 1 = 1$$

$x = -6$, $y = -1$ $\dashrightarrow$ $\bar{x} = -30$, $\bar{y} = -5$

$$x = -30 + 17k$$

$$y = -5 + 3k$$

$$17(-5 + 3k) - 3(-30 + 17k) = -17 \cdot 5 + \cancel{51}k + 3 \cdot 30 - \cancel{51}k = 5$$