TdN - NUMERI INTERI

Titolo nota 02/09/2018

- Numeri interi: $\{\underbrace{\dots,-2,-1}_{\text{interi negativi}},0,\underbrace{1,2,\dots}_{\text{interi positivi}}\} = \mathbb{Z}$

- Numeri naturali: $\mathbb{N} = \{(0)\,1, 2, \dots\}$

- Divisibilità "a divide b" se $\frac{b}{a}$ è intero $(a \neq 0)$

  $a \mid b$

  Esempi: $3 \mid 6$
  $4 \nmid 6$ (non divide)
  $1 \mid$ qualsiasi intero
  $-1 \mid$ "
  qualsiasi intero $\neq 0$ $\mid 0$

  - $a \mid b \not\Rightarrow b \mid a$ (non è simmetrica)
  - $a \mid a$ per ogni $a \neq 0$ (riflessiva)
  - $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiva)

  Infatti: $\frac{c}{a} = \underbrace{\frac{c}{b}}\cdot\underbrace{\frac{b}{a}}$ è intero

  interi

- Numeri primi e fattorizzazione

  Numeri primi: numeri interi positivi > 1 divisibili solo per 1 e per sé stessi.

  Esempi: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ 1 non è un numero primo!

Teorema di fattorizzazione unica

Ogni numero intero positivo n si scrive in modo unico come prodotto di numeri primi → a meno di riordinare i fattori

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

Esempio: $24 = 2^3 \cdot 3$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

intero qualsiasi $\neq 0$ $= \pm\, p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

Anche 1 (e -1) sono prodotto di nessun numero primo.

- MCD e mcm

MCD → Massimo comun divisore

mcm → minimo comune multiplo

$MCD(a,b)$ = il più grande divisore comune tra a e b

$MCD(30, 24) = 6$

$MCD(-30, 24) = 6$

$MCD(33, 5) = 1$ "33 e 5 sono coprimi, primi tra loro"

$MCD(a, 0) = a$, $a \neq 0$ ($MCD(0,0)$ non è definito)

$MCD(a, 1) = 1$

$mcm(a,b)$ = il più piccolo multiplo positivo comune tra a e b $(a,b \neq 0)$

$mcm(6, 9) = 18$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$
$$\Rightarrow MCD(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots$$

$$a = 15 = 3 \cdot 5 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$b = 24 = 2^3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$$

$$MCD(15, 24) = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$$

$$mcm(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdot \ldots$$

- Divisione con resto tra b e a (con $a > 0$)

$$b = a \cdot \underset{\text{quoziente}}{q} + \underset{\text{resto}}{r} \qquad \text{con } 0 \leq r < a$$

Esempio: $9 = 4 \cdot 2 + 1$

Nel caso particolare $r = 0$ si ottiene che $a \mid b$

- Algoritmo di Euclide per calcolare il MCD (senza dover fattorizzare a e b)

$a = 559$
$b = 247$

$$MCD(\overset{a}{559}, \overset{b}{247}) \overset{\circledast}{=} MCD(\overset{b}{247}, \overset{r}{65}) = MCD(65, 52) = MCD(52, 13) = MCD(13, 0) = 13$$

Divisione con resto tra a e b:

$$\underbrace{559}_{a} = \underbrace{247}_{b} \cdot \underbrace{2}_{q} + \underbrace{65}_{\text{resto } r}$$

$\circledast$ Infatti:

- se d è un divisore comune tra a e b, allora $d \mid r$

$$r = a - \underbrace{b \cdot q}_{\text{multiplo di } d}$$

- se d è un divisore comune tra b e r, allora $d | a$

$$a = \underbrace{b \cdot q + r}_{\text{multiplo di } d}$$

Iterare questo procedimento:

- $247 = 65 \cdot 3 + 52$
- $65 = 52 \cdot 1 + 13$ MCD (l'ultimo resto $\neq 0$)
- $52 = 13 \cdot 4 + 0$ Resto $= 0$

- Criteri di divisibilità per 2, 3, 5
  - per 2: guardare se l'ultima cifra è pari

    Es: $2 \nmid 147$ perchè 7 è dispari

    $147 = \underbrace{140}_{\text{multiplo di } 10} + 7$
  - per 5: guardare se l'ultima cifra è 0 oppure 5

    $147 = \underbrace{140} + 7$
  - per 3: guardare se la somma delle cifre è multipla di 3

    $147 \longrightarrow 1 + 4 + 7 = 12$ ✓

    $\downarrow$

    $1 + 2 = 3$