

Combinatoria - grafi - 1

Esercizio 1. Di seguito sono descritti alcuni grafi non diretti, dando l'insieme dei vertici V e l'insieme degli archi E (ogni arco è indicato come insieme di due elementi, poiché si sottintende che il grafo non sia diretto e dunque non importa l'ordine). Dire quali descrizioni rappresentano lo stesso grafo (a meno, ovviamente, di cambiare nome ai vertici).

G_1	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 7\}, \{7, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 1\}\}$
G_2	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}, \{1, 4\}, \{4, 7\}, \{7, 3\}, \{3, 6\}, \{6, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 1\}\}$
G_3	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 7\}, \{7, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 1\}\}$
G_4	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 6\}\}$
G_5	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 1\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 2\}\}$
G_6	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$
G_7	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 1\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 3\}\}$
G_8	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{6, 1\}\}$
G_9	$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E = \{\{1, 3\}, \{3, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$

Esercizio 2. Quanti diversi grafi (non diretti e senza loop) si possono costruire con 4 vertici? (Due grafi sono diversi se non c'è modo, rinominando i vertici, di trasformare l'uno nell'altro.)

Esercizio 3. Quanti diversi grafi (non diretti e senza loop) si possono costruire con 5 vertici e 5 archi?

Esercizio 4. Può esistere un grafo (non diretto e senza loop) con 5 vertici di cui uno di grado 4, uno di grado 1, due di grado 3 e uno di grado 2?

Esercizio 5. Può esistere un grafo (non diretto e senza loop) con 5 vertici di cui uno di grado 4, uno di grado 1, uno di grado 3 e due di grado 2?

Esercizio 6. Dimostrare che, per ogni $n \geq 4$, esiste un grafo con n vertici in cui ogni vertice ha grado 3.

Esercizio 7. Sia G un grafo con 18 vertici e 82 archi. E' vero che G contiene un triangolo (ovvero tre vertici tutti tra loro collegati).

Esercizio 8. Dimostrare che un albero in cui vertice ha grado almeno d contiene almeno d foglie.

Esercizio 9. Dimostrare che in un albero in cui nessun vertice ha grado 2 le foglie sono la maggioranza dei vertici.

Esercizio 10. Dimostrare che un grafo di n vertici in cui ogni vertice ha grado almeno $n/2$ è connesso.