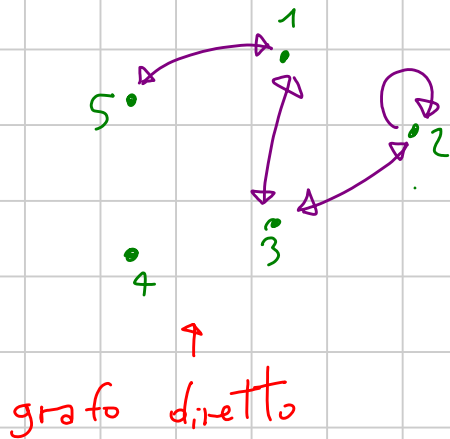
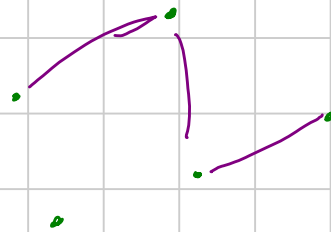


Def: un grafo V insieme di vertici;
e $E \subseteq V^2$ insieme di archi



$(1,5)$ $(3,1)$ $(2,3)$ $(2,2)$
 $(5,1)$ $(1,3)$ $(3,2)$

↑
grafo diretto



←
grafo indiretto

Domanda: quanti archi ci sono ^{al max} in un grafo con n nodi?

Al massimo tanti quante le coppie di V , $\binom{n}{2}$.

Grafo completo, K_n
ovvero
grafo completo su n nodi



K_3

Grado di un vertice $\deg(v)$ per $v \in V$
è il numero di archi uscenti da v



Domanda: c'è un modo facile di calcolare la somma dei gradi?

In generale:
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

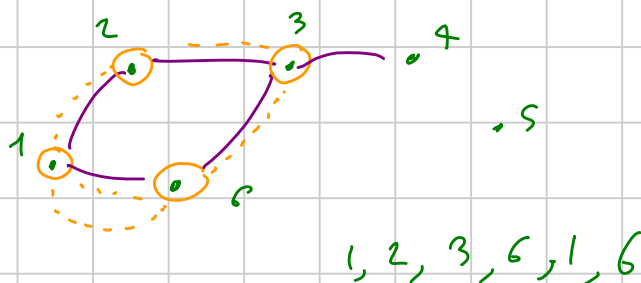
Dimostrazione: contiamo in 2 modi diversi la cardin. di

$$I = \left\{ (a, v) : a \in E, v \in V \text{ e } v \text{ è un estremo di } a \right\}$$

$$|I| = \sum_{a \in E} 2 = 2 \cdot |E|$$

$$|I| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

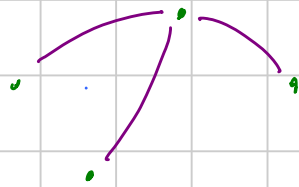
Cammino
è successione di
nodi collegati da archi



Ciclo è un cammino tale che il vertice iniziale = vertice finale e tutti gli altri vertici sono diversi

G è connesso se $\forall (v_1, v_2) \in V^2 \exists$ cammino che ha v_1 come iniziale e v_2 come finale.

Un Albero è un grafo G t.c. $\left\{ \begin{array}{l} \text{è connesso} \\ \text{non contiene cicli} \end{array} \right.$



albero

Un albero è un grafo connesso e minimale su E
(se togliamo qualsiasi arco $e \in E$,
non è più connesso)

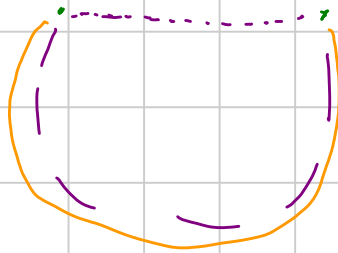
Un albero è un grafo senza cicli e massimale su E
(se aggiungiamo qualsiasi arco
allora compare almeno un ciclo)

Dim: I) non ci sono cicli, infatti;

altrimenti consideriamo un ciclo
posso togliere un singolo arco dal ciclo
e il grafo rimane connesso



II) devo solo verificare la connessione



In un albero vale $|V| = |E| + 1$

Dim: per induzione su $|V|$

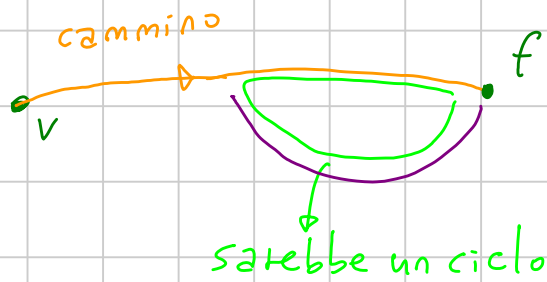
P.B. $|V| = 1$ in tal caso
vale $\therefore |V| = 1$ e $|E| = 0$

P.I. ip. induttiva: \forall albero su $|V| - 1$ vertici,
ci sono $|V| - 2$ archi;

ora abbiamo A un albero su $|V|$ vertici;

Def: una foglia di un Grafo è un nodo v t.c. $\deg(v) = 1$

Cerchiamo una foglia

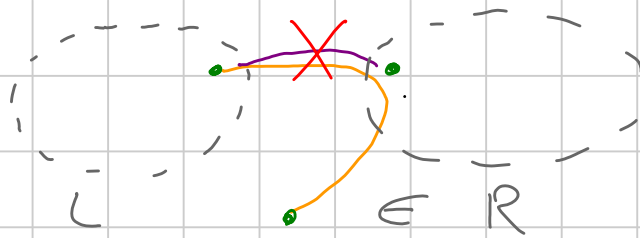


quindi f ha un solo arco uscente

Dim 2: Induzione su $|V|$ (estesa)

P.B. come prima

P.I. deve esistere almeno un arco,
lo togliamo



abbiamo ottenuto 2 alberi, L e R
 e ciascuno ha meno vertici di A

$$V(L) + V(R) = V(A)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \geq 1 \\ < V(A) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \geq 1 \\ < V(A) \end{matrix}$$

$$E(L) = V(L) - 1$$

$$E(R) = V(R) - 1$$

$$E(A) = E(R) + E(L) + \underbrace{1}_{\text{tolto}} = V(R) + V(L) - 1 = V(A) - 1$$

Un altro modo di vedere gli alberi

$$|V| = |E| + 1$$

