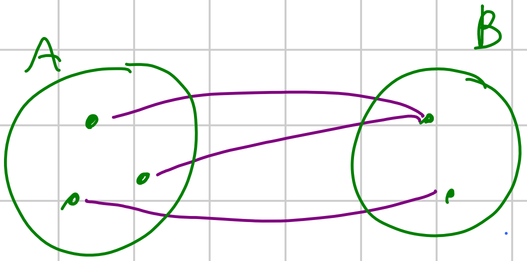
Combinatoria Grafi II

Titolo nota 25/09/2018

Def: un grafo G è bipartito se

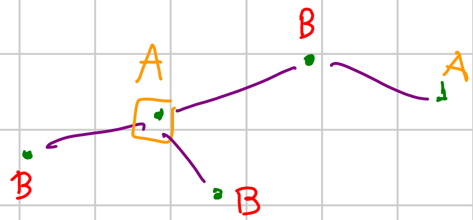
$$V = A \cup B \qquad (A \cap B = \emptyset)$$

t.c. ogni arco ha un estremo in A e uno in B



Oss: ogni ciclo ha lunghezza pari

Oss: se in un grafo G tutti i cicli hanno lunghezza pari allora G è bipartito



(il caso di un albero)

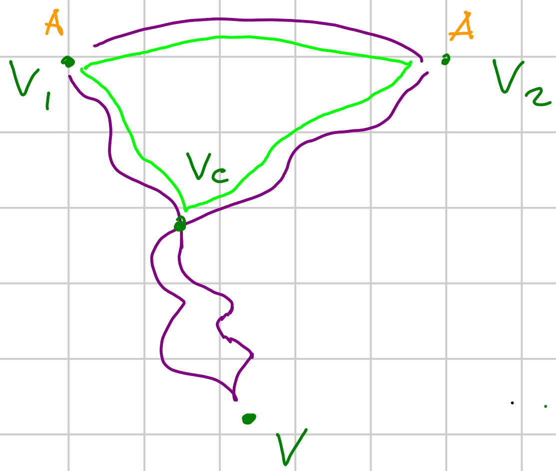
Dim: per primo oss. che ci basta bipartire ciascuna componente connessa di G

Da ora G è connesso.

Scegliamo un vertice $v \in G$ e lo etichettiamo con A per ogni altro $v' \in G$, consideriamo un cammino di lungh. minima da v a v' e etichettiamo

$$v' \text{ con } \begin{cases} A & \text{se } \ell \equiv 0 \ (2) \\ B & \text{se } \ell \equiv 1 \ (2) \end{cases}$$

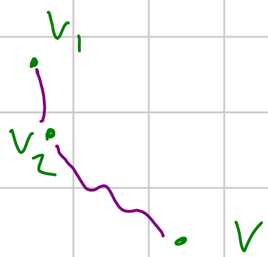
supponiamo, per assurdo, che esistano 2 vertici con la stessa etichetta e collegati, wlog A



- il cammino è un ciclo

  in particolare il cammino $v_1 \sim v_c \sim v_2$
  è diverso dal cammino $v_1 \frown v_2$

  infatti in tal caso
  la distanza tra v_1 e v =
  distanza tra v_2 e v + 1



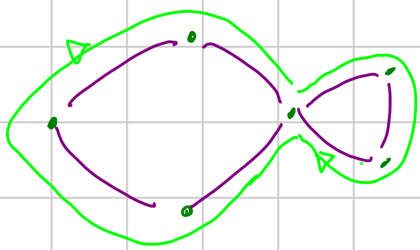
- tale ciclo ha lunghezza dispari
  infatti

$$d(v_1, v) = d(v_1, v_c) + d(v_c, v)$$
$$d(v_2, v) = d(v_2, v_c) + d(v_c, v)$$

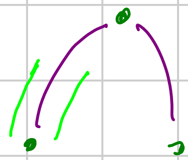
quindi, la lunghezza del ciclo

$$\begin{aligned} \ell &= d(v_1, v_c) + 1 + d(v_c, v_2) \\ &= d(v_1, v) + 1 + d(v, v_2) - 2d(v_c, v) \\ &\equiv 0 + 1 + 0 - 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

Un circuito euleriano su G è un cammino chiuso tale che ogni arco di G compare esattamente una volta.

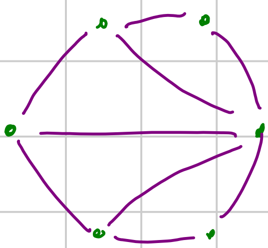


circuito euleriano



non esistono circuiti euleriani

Domanda: quando esistono circuiti euleriani?



(i 7 ponti di Konigsberg)

In un grafo connesso G, esiste un circuito euleriano se e solo se $\deg(v) \equiv 0 \ (2) \quad \forall v \in V$

Dim: $\Rightarrow$

per ogni vertice v, v compare nel cammino e ogni volta che compare $\exists$ esattamente 2 archi che hanno v come estremo e che vengono visitati solo in questo momento

$v_1, v_2, \dots \quad v_p, v, v_s \dots \quad , v, \dots \quad v_1$

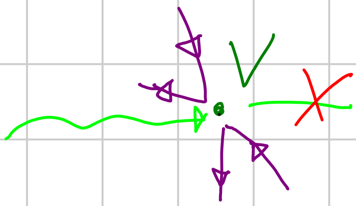
quindi il grado di v è pari.

$\Leftarrow$

Consideriamo un circuito tale che:
- visiti mai 2 volte lo stesso arco *
- abbia lunghezza massima

Lemma: in un grafo connesso G $\forall v \in V(G)$ esiste un circuito * e che passa per v

dim lemma: partendo da v, costruiamo un cammino muovendoci sempre quando possibile (senza violare *) ad un certo punto ci si ferma perché gli archi sono in numero finito

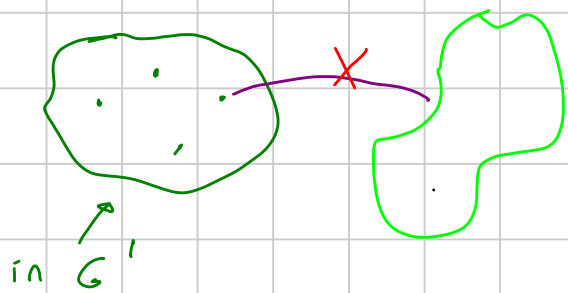


siamo sicuri di essere tornati in v di partenza

Tornando alla dim. ci rimane da mostrare che nessun arco rimane fuori dal circuito

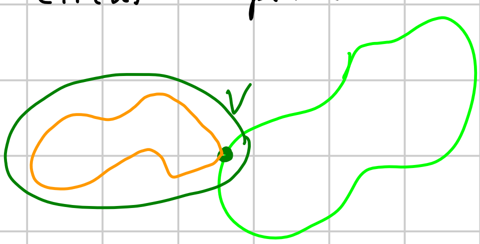
sia G' il grafo sui vertici di G i cui archi sono quelli che non sono stati visitati

Oss: ogni componente connessa di G' ha un vertice sul circuito tolto



ora, per una di queste componenti C in cui rimane almeno un arco, per il lemma, $\exists$ un circuito che passa per $v \in C$

$v \in$ circuito di prima



il nuovo circuito ottenuto facendo prima poi

assurdo.

Un circuito è detto hamiltoniano se ogni vertice compare esattamente una volta.

Non esiste teoria generale o caratterizzazione più semplice