Combinatoria Invarianti I

Titolo nota 27/09/2018

Esempio tipico

Sistema di oggetti con alcune mosse che lo modificano

Tesi tipo: se ho config. iniziale C_1, potrò mai raggiungere la config. finale C_2?

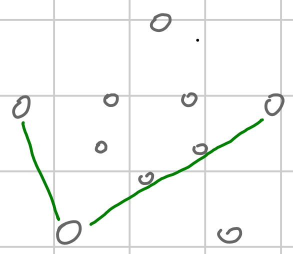
Tecnica degli invarianti:

- si costruisce una quantità I di stato,
- si verifica che I non cambia in seguito all'applicazione delle mosse,
- si controlla se $I(C_1) \neq I(C_2)$

$\Rightarrow$ la risposta alla domanda della tesi è NO.

Oss: la tecnica degli invarianti può solo dimostrare l'impossibilità di ottenere un risultato.

Esempio.



all'inizio le 10 lampadine sono spente, ad ogni mossa posso cambiare lo stato a tutte quelle che appartengono ad uno stesso lato o diagonale

Tesi: è possibile accenderle tutte?

Sol: I: consideriamo solamente le 5 lampadine esterne, allora ogni mossa cambia lo stato di 2 di queste

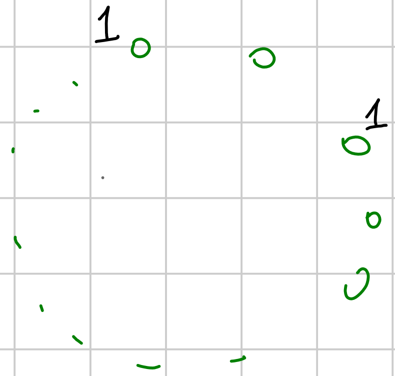
$I :=$ parità delle lampadine accese tra queste 5

Oss: I non cambia

Però, I all'inizio è 0 mentre alla fine dovrebbe essere 1

Esempio 2 Ci sono alcuni gettoni sui vertici di un 2018-agono all'inizio esattamente uno sui vertici 1 e 3 e zero sugli altri, abbiamo 2 mosse:

- aggiungere un gettone su 2 vertici opposti
- aggiungere un gettone su 2 vertici adiacenti.



La domanda è: si può ottenere una conf. in cui tutti vertici hanno lo stesso numero di gettoni?

Sol: $I = \sum_{\text{posti pari}} \text{gettoni} - \sum_{\text{posti dispari}} \text{gettoni}$

allora 2 posti vicini hanno parità diverse

e lo stesso si ha per 2 opposti

$\Rightarrow I$ non cambia

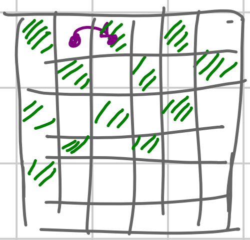
I all'inizio vale $0 - 2 = -2$

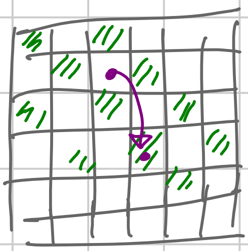
alla fine dovrebbe valere $x - x = 0$.

Oss: ogni volta che in un problema ci sono delle mosse che cambiano uno stato, è bene cercare delle quantità invarianti.

Micro Esempio: abbiamo una pulce che si muove su un grafo bipartito
in particolare in ogni momento sta un un vertice bianco oppure su uno nero
inoltre dopo un numero pari di mosse, il colore non cambia.

Sottoesempi:





Esempio 3 Ci sono diverse pile di gettoni numerate su $\mathbb{Z}$

$$\dots\ a_{-2}\ a_{-1}\ a_0\ a_1\ a_2\ \dots$$

l'unica mossa è spostare 2 gettoni scelti ovunque uno si muova verso + e uno verso −

Un invariante utile è il baricentro

$I := \sum_{n \in \mathbb{Z}} n\, a_n$, allora quando faccio la mossa su i e j

I diventa $I - i + (i+1) - j + (j-1) = I$

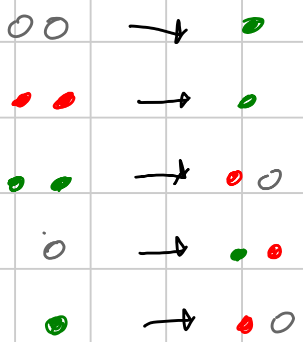
Simile al 3: delle pile su una circonferenza con le mosse come prima

$$I := \sum_{n=1}^{N} n\, a_n \pmod N$$

↳ N = numero di pile

Esempio 4: Abbiamo uno scatolone con molte palline di 3 colori: 

ci sono le mosse:



Vogliamo trovare un'invariante

lo stato è dato da il numero di palline di ciascun colore R, B, V

Cerchiamo invarianti del tipo $aR + bB + cV$ modulo M

$$\begin{cases} 2b \equiv c & (M) \\ 2a \equiv c & (M) \\ 2c \equiv a+b & " \\ b \equiv a+c & \\ c \equiv a+b & \end{cases}$$

$2a \equiv 0 \quad (M)$, $\quad c \equiv 0 \quad (M)$, $\quad 2b \equiv 0 \quad (M)$

$a + b = 0 \quad (M)$

$\rightarrow \quad M = 2 \ , \ c = 0 \ , \ a = b = 1$