Combinatoria   Invarianti II

Titolo nota   27/09/2018

Monovarianti

Problema tipo: un sistema che varia secondo certe mosse

Domanda tipo: se è possibile che esistano successioni di mosse arbitrariamente lunghe oppure no

Tecnica generale: sia M dipendente solo dallo stato e verifichiamo che
- ad ogni mossa M aumenta
- esiste un bound $M \leq B$ assoluto

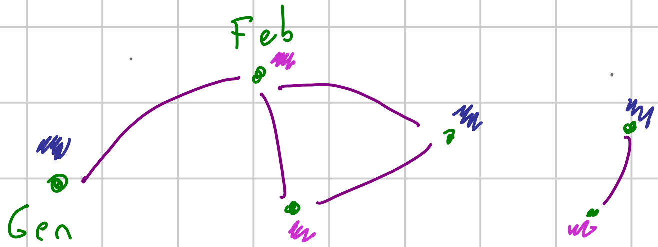
(supponiamo che $M \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ sono possibili solo finite mosse

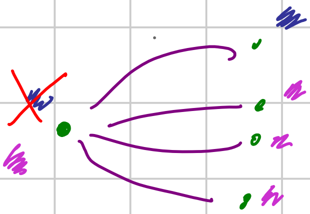
Esempio 1. Ci sono 12 nani Gen, Feb, ..., Dic
tra questi alcuni sono amici.
Ogni anno nel mese di gennaio, Gen visita i suoi amici. Le case di nani sono
Se, a fine mese, Gen nota che la maggioranza stretta dei suoi amici ha la casa diversa dalla sua, la ridipinge conformandosi.

Domanda: questo processo terminerà?

Sol: possiamo riformulare il problema con un grafo



Sia M il numero di archi che collegano colori distinti.
Allora



- non succede nulla
- il nano cambia il suo colore

il nuovo M diventa M − n° vicini di "col ≠" + n° vicini di "col ="

succede solo se vicini "col ≠" > vicini "col ="

⇒ M scende strettamente quando si applica una mossa

Dato $M \geq 0$, sono possibili solo finiti cambiamenti.

Esempio 2. Solitario su alcune pile di monete

* - togliere una moneta da una pila

* - dividere una pila in 2 (ciascuna con almeno una moneta)

Tesi: vedere che sono possibili solo finite mosse.

Sol: $M = |\{\text{monete}\}| - |\{\text{pile}\}|$

infatti, * se tolgo una moneta da una pila che ne ha almeno 2
⇒ M scende di 1

altrimenti, se divido una pila, M scende di 1

Il caso in cui tolgo l'unica moneta di una pila è più delicato.

Occorre tenere nello stato il numero di pile "vuote".

Il lower bound è dato $M \geq 0 - n$
(n = numero di monete)

Sol': Sia $M' = \sum_i n_i^2$ dove n_i è il numero di monete sulla pila i-esima.

In questo caso * fa scendere M' ovviamente
anche * " perché
$n_i^2 > a^2 + b^2$ vero perché
$n_i = a + b$ e $a, b \geq 1$.

Esempio 3. N numeri $\in \mathbb{Z}$ scritti in fila
le mosse possibili sono
scegliamo 2 interi vicini x, y t.c. $x > y$
possiamo sostituirli con
* y, x
* $x-1, x$
Dimostrare che sono possibili solo finite mosse.

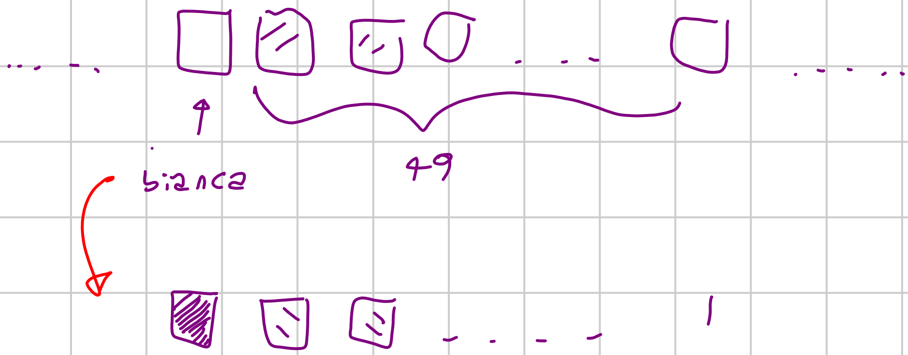
Sol: $M = \sum_i i \cdot n_i$ allora

* $i \cdot x + (i+1)y$ diventa $iy + (i+1)x$
* $ix + (i+1)y$ " $i(x-1) + (i+1)x$
è equivalente $i < (x-y)(i+1)$

rimane da mostrare che M ammette un upper bound!

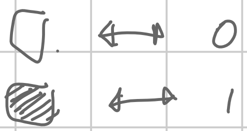
Esempio 4. Ci sono 2018 carte (ciascuna ha una faccia nera e una bianca), sono in fila sul tavolo.

Una mossa consiste scegliere una carta con la faccia bianca t.c. ci siano almeno 49 carte alla destra e capovolgere lei e le 49 subito a destra



Dimostrare che sono possibili finite mosse.

Sol: interpretiamo la succ. di carte come un numero binario:



allora ogni mossa aumenta questo numero M

Ovviamente, $M \leq \sum_{i=1}^{2018} 2^i$

Esempio 5. Ci sono N nani in fila e ciascuno ha uno dei numeri da 1 a N.
La fila può cambiare nel seguente modo:
il nano con il numero j può superare j nani davanti a lui (se ce ne sono).

Mostriamo che sono possibili solo finiti sorpassi.

Sol: Osserviamo che un nano j sorpassa un nano i con $i > j$.

Consideriamo la sequenza di N numeri:

$a_1, \dots, a_N$

dove a_i è la posizione nella fila di i

Ad ogni sorpasso, la posizione di j diminuisce (di j)
mentre esiste $i > j$ t.c. la posizione di i aumenta (di 1)

Consideriamo l'ordinamento lessicografico

$(a_1, \dots, a_N) \prec (b_1, \dots, b_N)$ quando

$a_N < b_N \quad \vee$

$a_N = b_N$ e $a_{N-1} < b_{N-1} \quad \vee$

$a_N = b_N, \ a_{N-1} = b_{N-1}, \ a_{N-2} < b_{N-2} \quad \vee \quad \dots$

e le successioni sono finite (sono solo le permutazioni di $1, \dots, N$).