Geometria - sintetica 1

In quanto segue, ABC è un triangolo, H è il suo ortocentro (incontro delle altezze), Γ è la circonferenza circoscritta ad ABC ed O è il centro di Γ, ω è la circonferenza inscritta in ABC ed I è il centro di ω.

Esercizio 1. Siano E, F i punti in cui ω tocca i lati CA e AB. Allora il quadrilatero $AEIF$ è ciclico.

Esercizio 2. Siano H_A e H_B i piedi delle altezze da A e da B su BC e AC. Allora BH_AH_BA è ciclico.

Esercizio 3. Sia I_A l'excentro opposto ad A; allora IBI_AC è ciclico.

Esercizio 4. Si supponga ABC acutangolo e sia H' il simmetrico di H rispetto al lato AB. Allora $AH'BC$ è ciclico.

Esercizio 5. Si supponga ABC ottusangolo e sia H' il simmetrico di H rispetto al lato AB. Allora $AH'BC$ è ciclico.

Esercizio 6. Sia D il simmetrico di A rispetto al punto medio di BC e sia E il simmetrico di D rispetto al segmento BC. Allora E sta su Γ.

Esercizio 7. Siano M_A, M_B i punti medi di BC e CA, H_A, H_B i piedi delle altezze da A e da B su BC e CA. Mostrare che M_A, H_A, M_B, H_B stanno su una circonferenza.

Esercizio 8. Sia Ω una circonferenza e siano P, Q, R, S, T cinque punti su di essa in questo ordine, di modo che Q sia punto medio dell'arco PR. Chiamiamo E ed F le intersezioni di PS con QT e di RT con QS; dimostrare che $EFST$ è ciclico.

Esercizio 9. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X e Y; siano P e Q su Γ_1 e siano R e S le seconde intersezioni di PX e QY con Γ_2. Dimostrare che esiste una circonferenza Γ_3 che passa per P, Q, R, S.

Esercizio 10. Nella situazione dell'esercizio precedente, mostrare che PQ, XY, RS concorrono.

Esercizio 11. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X, Y. Scegliamo due punti P, Q su Γ_1 ed un punto R su Γ_2, di modo che P, Q, R non siano allineati, e sia Γ_3 la circonferenza per P,Q, R. Sia S è la seconda intersezione di Γ_2 e Γ_3; dimostrare che se P, R, X sono allineati, allora anche Q, S, Y sono allineati.

Esercizio 12. Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X e Y. Siano P su Γ_1 e Q su Γ_2 tali che PQ sia tangente a entrambe le circonferenze; mostrare che il punto medio di PQ sta su XY.