Geometria - sintetica 2

Esercizio 1. Utilizzando il teorema di Ceva, dimostrare che

- le altezze di un triangolo concorrono
- le bisettrici di un triangolo concorrono
- in un triangolo ABC, detti X, Y, Z punti esterni tali che BCX, CAY, ABZ sono triangoli equilateri, le rette AX, BY, CZ concorrono
- in un triangolo ABC, detta D l'intersezione delle tangenti in B e C alla circonferenza circoscritta e similmente definiti E, F, le rette AD, BE, CF concorono.

Esercizio 2. Date tre circonfereze $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$ di centri $O_1,\ O_2,\ O_3$ esterne l'una all'altra e non intersecantisi, sia A_1 l'intersezione delle tangenti comuni interne a Γ_2, Γ_3 e similmente definiamo A_2, A_3, allora le rette O_iA_i, per $i = 1, 2, 3$, concorrono.

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo e siano AD, BE, CF tre ceviane che si incontrano in P. Dimostrare che

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1 \ .$$

Esercizio 4. Sia ABC un triangolo e siano AD, BE, CF tre ceviane che si incontrano in P. Dimostrare che

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} \ .$$

Esercizio 5. Sia ABC un triangolo e siano D, E, F i punti medi di BC, CA, AB. Detta P l'intersezione tra AD e EF, chiamiamo Q l'intersezione tra CP e AB. Mostrare che $AB = 3AQ$.

Esercizio 6. Sia AD altezza e sia K un suo qualunque punto. Si prolunghino BK e CK fino ad intersecare AC e AB in E e F. Si mostri che AD biseca $\widehat{EDF}$.

Esercizio 7. Siano $AD,\ BE,\ CF$ ceviane concorrenti e siano $L,\ M,\ N$ su $EF,\ FD,\ DE$. Dimostrare che $DL,\ EM,\ FN$ concorrono se e solo se $AL,\ BM,\ CN$ concorrono.