P - ALTRI CASSETTI

Titolo nota 01/09/2018

Esempio Trovare il massimo n per cui esistono n interi positivi distinti $a_1 \ldots a_n$, con le seguenti proprietà

- i fattori primi degli a_i sono < 30
- $a_i \cdot a_j$ non è un quadrato perfetto per ogni $i \neq j$

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

  10 numeri primi

- $a = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \cdot \ldots \cdot 29^{\alpha_{29}}$

- Quando ab è un quadrato?

  $b = 2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot 29^{\beta_{29}}$

  $ab = 2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot 3^{\alpha_3+\beta_3} \cdot \ldots \cdot 29^{\alpha_{29}+\beta_{29}}$

  ab è un quadrato se e solo se ogni $(\alpha_p + \beta_p)$ è pari, cioè se e solo se ogni α_p ha la stessa parità di β_p

- Ad a associo la seguente sequenza di 10 cifre binarie (parità): scrivo

$a = 2^{\alpha_2} \cdots 29^{\alpha_{29}}$ $\qquad \underbrace{(\text{parità di } \alpha_2, \text{par. di } \alpha_3; \ldots, \text{par. di } \alpha_{29})}_{\text{è il cassetto in cui metto } a}$

$a \cdot b$ è un quadrato se e solo se a e b sono nello stesso cassetto.

- Ci sono 2^{10} cassetti

Risposta: con $n = 2^{10}+1$ numeri avrei almeno un $a \cdot b$ che è un quadrato.

con $n = 2^{10}$ posso scegliere gli $a_1 \ldots a_n$ opportunamente (uno per cassetto), senza avere alcun $a \cdot b$ quadrato.

Esempio Ho n^2+1 numeri reali distinti $x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1}$. Allora esistono $n+1$ indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ per cui la sottosequenza $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ è monotona (crescente o decrescente)

Supponiamo che non esiste una sottosequenza lunga $n+1$ crescente. Allora per ogni K da 1 a n^2+1 consideriamo la più lunga sottosequenza crescente $x_{i_1}, \dots x_{i_h}$ dove $i_1 = k < i_2 < \dots < i_h$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_k \quad \dots \quad x_{n^2+1}$$

h dipende da k e per ogni k c'è un massimo possibile per h.

Per ciò che abbiamo supposto $1 \le h \le n$

→ esistono almeno $n+1$ valori di K, chiamati $k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1}$, per cui h è lo stesso

---

Dim che $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_{n+1}}$ è decrescente

Infatti per assurdo $x_{k_j} < x_{k_{j+1}}$.

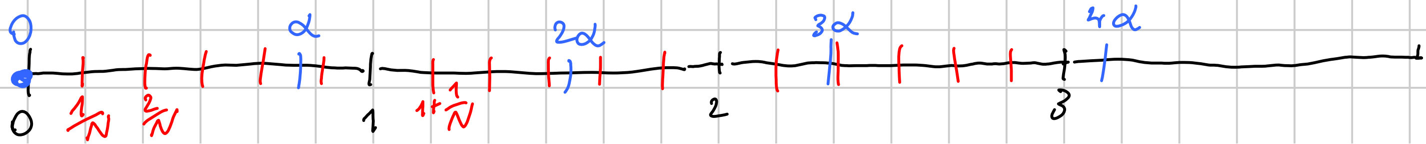
Allora da x_{k_j} parte una sottosequenza crescente lunga $h+1$: da $x_{k_{j+1}}$ ne parte una lunga h, e mettendo x_{k_j} all'inizio ne ho una più lunga, assurdo.

Esempio (Dirichlet) $\alpha > 0$ un numero irrazionale.

Sia $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora esistono $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $q < N$ per cui

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} < \frac{1}{q^2}$$

Consideriamo i multipli di α: $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots N\alpha$



$$\left[k+\frac{i}{N}, k+\frac{i+1}{N}\right] \qquad k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq i \leq N-1$$

ogni multiplo di α cade in esattamente un intervallo di questa forma.

Ad $m\alpha$ associo il valore di i tra 0 e $N-1$ per cui

$$m\alpha \in \left[k+\frac{i}{N}, k+\frac{i+1}{N}\right] \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}$$

Esistono $m\alpha$ e $\bar{m}\alpha$ nello stesso cassetto, con $m, \bar{m}$ tra 0 e N.

$$m\alpha \in \left[k+\frac{i}{N}, k+\frac{i+1}{N}\right] \qquad \bar{m}\alpha \in \left[\bar{k}+\frac{i}{N}, \bar{k}+\frac{i+1}{N}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} m\alpha &= k+\frac{i}{N}+\varepsilon \quad \text{con } 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{N} \\ \bar{m}\alpha &= \bar{k}+\frac{i}{N}+\bar{\varepsilon} \quad \text{con } 0 \leq \bar{\varepsilon} < \frac{1}{N} \end{aligned}\right\}$$

chiamiamo m il più grande tra m e $\bar{m}$

$$\underbrace{(m-\bar{m})}_{q}\alpha = \underbrace{(k-\bar{k})}_{p} + (\varepsilon-\bar{\varepsilon})$$

$$\alpha - \frac{k-\bar{k}}{m-\bar{m}} = \frac{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}{m-\bar{m}}$$

molto piccolo in modulo

$$|\varepsilon-\bar{\varepsilon}| < \frac{1}{N} \quad \text{perché} \quad \varepsilon, \bar{\varepsilon} \in \left[0, \frac{1}{N}\right)$$

$$\frac{|\varepsilon-\bar{\varepsilon}|}{q} < \frac{1}{Nq} \qquad q = m-\bar{m} < N \qquad m, \bar{m} \in [0, N]$$