Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
MIUR

7 Febbraio 2019

Gara Nazionale Classi Prime 2019

Problemi

In questa lista di problemi la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle 36 versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*
In questa lista i problemi non sono necessariamente in ordine di difficoltà, ma comunque abbiamo marcato quelli che secondo noi erano i più semplici col simbolo $\mathcal{F}$.

Per la Commissione Olimpiadi: Emanuele Callegari.

1. $\mathcal{F}$ Sia n il prodotto delle prime 10 potenze di 8, cioè $n = 8^0 \cdot 8^1 \cdot 8^2 \cdot \ldots \cdot 8^9$. Quante cifre ha la rappresentazione binaria di n?

A 136 B 49 C 91 D 120 E 27 F 28

2. $\mathcal{F}$ Le caselle di una tabella 9×9 sono colorate di bianco e nero (vedi figura). La casella centrale è bianca, poi le cornici che via via la circondano sono alternativamente nere e bianche.

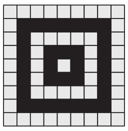

figura 1

Si immagini di fare la stessa cosa con una tabella 81×81. Qual è, in questa nuova tabella, la differenza tra il numero di caselle bianche e il numero di caselle nere?

A 161 B 321 C 81 D 167 E 319 F 1

3. $\mathcal{F}$ Quale tra le seguenti parole ha il maggior numero di anagrammi? (Considerare tutti gli anagrammi, anche quelli senza senso)

A **CANNE** B **CANE** C **CENE** D **CANNA** E **NANNE** F **NANNA**

4. $\mathcal{F}$ La *distanza* tra due anagrammi di una stessa parola è il minimo numero di scambi tra lettere consecutive che devo fare per trasformare uno dei due nell'altro. Ad esempio **ACTA** ha *distanza* 1 da **ATCA** e *distanza* 2 da **ATAC**. Qual è la massima *distanza* che può esserci tra **MAMMMMME** e uno dei suoi anagrammi?

A 12 B 14 C 11 D 10 E 6 F 9

5. $\mathcal{F}$ Luca ha solo monete da 2 Euro, 1 Euro e 50 centesimi, ma ne ha tantissime (più di 20) per ciascuno dei 3 tipi. In quanti modi diversi può dare 10 Euro a Claudia?

A 36 B 27 C 40 D 28 E 25 F 12

6. $\mathcal{F}$ Quanto vale $888111555000^2 - 888111555004 \cdot 888111554996$?

A 16 B 0 C -4 D 12 E 18 F nessuna delle altre risposte è esatta

7. $\mathcal{F}$ L'insegnante di informatica della 3^aD, per far capire ai suoi 20 alunni le finezze del calcolo parallelo, assegna loro il compito di sommare 200 numeri. I ragazzi si organizzano in modo da parallelizzare il lavoro. Scrivono i 200 numeri su 200 foglietti e li mettono in un cesto, poi impostano una sveglia in modo che, a partire dalle ore 10:00, suoni ogni 5 minuti. Al primo squillo della sveglia, ciascuno di loro prende dal cesto due foglietti, torna al posto, li somma, scrive il risultato su un nuovo foglietto e corre a rimetterlo nel cesto prima che la sveglia suoni di nuovo. Ripetono questa operazione ad ogni squillo finché nel cesto rimane un solo foglietto, che contiene quindi la somma richiesta. Ovviamente, nei turni in cui i foglietti nel cesto sono meno di 40, alcuni ragazzi devono rimanere fermi.
Che ore sono quando, per la prima volta, la sveglia squilla e c'è un solo biglietto nel cesto?

A 11:10 B 10:55 C 11:00 D 11:05 E 11:15 F 10:50

8. $\mathcal{F}$ Siano dati i numeri $a = 132132$, $b = 9^{13} - 3^{24}$ e $c = 998800$. Quali di essi sono dei cubi perfetti?

A solo b B solo a e b C solo a e c D solo b e c E tutti F nessuno

9. $\mathcal{F}$ L'isola *Kenoncè* adotta, per misurare le lunghezze, 4 diverse unità di misura: il **Pollice**, il **Mignolo**, l'**Indice** e la **Spanna**. Sappiamo che 7 **Indici** sono lunghi quanto 5 **Spanne**, 21 **Mignoli** quanto 20 **Pollici** e 2 **Indici** quanto 3 **Mignoli**.
A quante **Spanne** equivalgono 140 **Pollici**?

A 70 B 105 C 630 D 42 E 450 F 12

10. $\mathcal{F}$ Quanti sono i divisori positivi dispari di 8100 che sono multipli di 5?

A 10 B 15 C 9 D 30 E 12 F 18

11. Tutta la classe 5^aM (composta da 10 maschi e 8 femmine) ha superato l'esame di maturità: ogni voto era compreso tra 60 e 100. La media dei voti dei maschi è stata 76 mentre quella complessiva è stata 80. Quante sono state, al massimo, le ragazze che hanno preso 100?

A 5 B 1 C 2 D 3 E 4 F 6

12. Per ogni intero positivo k indichiamo con n_k quel numero intero positivo la cui rappresentazione binaria ha esattamente k cifre e sono tutte uguali a 1.
Quanto vale $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{10}$?

A 2036 B 2048 C 1048 D 1536 E 2064 F 1792

13. Trovare in quanti modi diversi è possibile ricoprire completamente la seguente griglia 4×4 con tasselli 1×2, con la restrizione che i tasselli non possono essere messi a cavallo del segmento orizzontale segnato in grassetto.

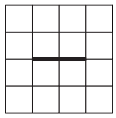

figura 2

I tasselli possono essere ruotati ma non possono essere sovrapposti.

A 26 B 12 C 32 D 45 E 30 F 36

14. In quanti modi posso scegliere la coppia di interi (a, b), con $a < b$, in modo che a e b siano entrambi divisori di 60060, ma che $\mathrm{MCD}(a, b) = 6$?

A 121 B 128 C 364 D 60 E 32 F 81

15. Dato il polinomio $p(x, y) = x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5$, sia $n = p(19, 18)$, cioè n è il numero che si ottiene sostituendo i valori $x = 19$ e $y = 18$ nel polinomio.
Quanti diversi numeri primi compaiono nella fattorizzazione di n?

A 4 B 3 C 5 D 6 E 7 F più di 7

16. Il piccolo Luca ha 60 cubetti di legno, tutti con lo spigolo di 1 cm. Utilizzandoli tutti costruisce un parallelepipedo con la superficie totale di 104 cm^2. Quanto vale, espressa in centimetri, la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli del parallelepipedo?

A 52 B 36 C 56 D 64 E 72 F 80

17. Del numero intero positivo n sappiamo che $30n$ ha 45 divisori positivi (contando anche 1 e $30n$). Quanti sono i divisori positivi di n?

A 16 B 42 C 36 D 12 E 24 F 32

18. Sia $\mathcal{I}$ un insieme di 2019 punti nel piano, dei quali non conosciamo le posizioni. L'unica informazione che abbiamo su $\mathcal{I}$ è che, comunque si prendano in $\mathcal{I}$ tre punti A, B e C, l'area del triangolo ABC non supera mai 2018 cm^2.
Si consideri l'affermazione: *"Esiste un triangolo che contiene tutto $\mathcal{I}$ e la cui area, espressa in* cm^2*, vale λ."*
Qual è, tra quelli proposti sotto, il più piccolo valore di λ per il quale possiamo essere sicuri che tale affermazione sia vera?

A 8072 B 8073 C 2018 D 2019 E 4035 F 4036

Soluzioni

Qui di seguito trovate le soluzioni in forma scritta. Alcune soluzioni in forma di video verranno successivamente pubblicate sul canale YouTube:

`problemisvolti.it`

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: 136.
Si ha:

$$n = 8^0 \cdot 8^1 \cdot 8^2 \cdot \ldots \cdot 8^9 = 8^{0+1+2+\ldots+9} = 8^{45} = 2^{135}$$

Di conseguenza, passando in base 2, si ottiene:

$$n = 1\overbrace{000\ldots0}^{135}$$

e quindi le cifre sono 136.

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: 161
Attorno alla casella bianca centrale ci sono 20 doppi strati nei quali lo strato più interno è nero, mentre quello più esterno e bianco.
In ogni doppio strato, lo strato più esterno (bianco) ha 8 caselle in più dello strato interno (nero). Per convincersene basta osservare che in ogni angolo le caselle bianche sono 2 in più delle caselle nere, come si può vedere nella figura seguente:

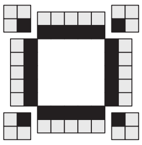

figura 3

Quindi, in tutto, le caselle bianche in più sono 8 per ciascuno dei 20 doppi strati, a cui va aggiunta la casella bianca centrale, quindi sono $20 \cdot 8 + 1$, cioè 161.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: **CANNE**.
Chi conosce la formula per contare gli anagrammi può ovviamente contare quelli di ciascuna parola e ottenere che **CANNE** ne ha 60, **CANE** 24, **CENE** 12, **CANNA** 30, **NANNE** 20 e **NANNA** 10.
Tuttavia è possibile stabilire chi ha più anagrammi anche senza contarli ma solo con considerazioni qualitative.
Ad esempio è ovvio che **CANNE** ha il doppio degli anagrammi di **CANNA** perché da ogni anagramma di **CANNA** si possono ottenere due anagrammi distinti di **CANNE** tramutando in **E** una delle due **A**. Ad esempio da **CANNA** si possono ottenere **CANNE** e **CENNA**.
Con lo stesso tipo di argomentazione posso concludere che gli anagrammi di **CANE** sono il doppio di quelli di **CENE** e che quelli di **CANNE** sono il triplo di quelli di **NANNE** che, a loro volta, sono il doppio di quelli di **NANNA**.
Per poter concludere che **CANNE** è la parola con più anagrammi rimane solo da mostrare che ha più anagrammi di **CANE**, ma questo è ovvio perché gli anagrammi di **CANE** si possono mettere in corrispondenza biunivoca con il sottoinsieme degli anagrammi di **CANNE** che hanno le 2 lettere **N** in posizioni consecutive.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: 12.
L'anagramma più distante da **MAMMMMME** è quello in cui le lettere **A** ed **E** occupano posizioni più distanti possibile da quelle che occupano nella parola di partenza.
Tale anagramma è **EMMMMMMA**.
La sua distanza da **MAMMMMME** è 12.
Infatti, partendo da

EMMMMMMA

servono 7 scambi per far migrare la **E** dalla prima posizione all'ultima, ottenendo

MMMMMMAE

dopodichè con altri 5 scambi si fa migrare la **A** indietro di 5 posizioni, ottenendo

MAMMMMME

Quindi 12 scambi bastano.
D'altra parte con meno di 12 scambi non ce la si può fare, perchè la **E** va spostata di 7 passi e la **A** di 6 e solo una volta (quando si scavalcano) capita che uno scambio le sposti entrambe, per cui servono almeno 12 scambi.
Quindi la distanza tra le due parole è 12.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: 36.
Conviene enumerare i casi raggruppandoli a seconda di quante sono le monete da 2 Euro che vengono utilizzate.
Ad esempio se vengono utilizzate 2 monete da 2 Euro significa che bisogna contare in quanti modi posso mettere insieme i rimanenti 6 Euro usando solo monete da 1 Euro e da mezzo Euro.
I modi sono chiaramente 7 perchè, una volta che ho fissato quante monete da 1 Euro usare (tra 0 e 6) rimane fissata la quantità di monete da mezzo Euro da aggiungere.
Procedendo in modo analogo in tutti i casi si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\text{5 monete da 2 Euro} \longrightarrow \text{1 modo}\\
&\text{4 monete da 2 Euro} \longrightarrow \text{3 modi}\\
&\text{3 monete da 2 Euro} \longrightarrow \text{5 modi}\\
&\text{2 monete da 2 Euro} \longrightarrow \text{7 modi}\\
&\text{1 moneta da 2 Euro} \longrightarrow \text{9 modi}\\
&\text{0 monete da 2 Euro} \longrightarrow \text{11 modi.}
\end{aligned}$$

Quindi i modi sono in tutto:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: 16.
Basta osservare che il calcolo richiesto è

$$n^2 - (n+4)(n-4)$$

con $n = 888111555000$.
Il risultato è ovviamente

$$n^2 - (n+4)(n-4) = n^2 - n^2 + 16 = 16.$$

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: 11:10.
Ad ogni squillo della sveglia, se nel cesto ci sono almeno 40 foglietti, entro lo squillo successivo i ragazzi avranno complessivamente prelevato dal cesto 40 foglietti (2 ciascuno) e reinseriti 20 foglietti (1 ciascuno). Questo fa diminuire il numero di foglietti esattamente di 20.
Questo significa che, dopo 9 operazioni di questo tipo, allo squillo delle 10:45 i foglietti sono diventati $200 - 180$, cioè 20.
A quel punto però, non è più possibile utilizzare tutti i 20 ragazzi, perchè su ogni coppia di foglietti può lavorare un ragazzo solo. Ad ogni passo quindi il numero di foglietti diminuisce di una quantità che è uguale al numero delle coppie di foglietti che si riescono a prendere.
Quindi il numero di foglietti varia nel modo seguente:

$$20 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

La procedura si conclude quindi con lo squillo delle 11:10.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: solo b.
Intanto b è un cubo perché:

$$b = 9^{13} - 3^{24} = 9^{13} - 9^{12} = 9^{12} \cdot (9-1) = 9^{12} \cdot 8 = \left(9^4 \cdot 2\right)^3.$$

Per mostrare che invece a e c non lo sono, basta trovare nella loro fattorizzazione un primo che compaia con esponente che non è multiplo di 3.
Per $a = 132132$ osserviamo che la somma delle cifre è 12, quindi è divisibile per 3 ma non per 9 e, di conseguenza, nella sua fattorizzazione il 3 compare con esponente 1.
Per $b = 998800$ invece osserviamo che le ultime 3 cifre sono 800 e quindi nella sua fattorizzazione il 5 compare con esponente 2, perché è divisibile per 25 ma non per 125.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: 70
Sappiamo che:

$$\begin{aligned}
20\,\textbf{Pollici} &= 21\,\textbf{Mignoli}\\
3\,\textbf{Mignoli} &= 2\,\textbf{Indici}\\
7\,\textbf{Indici} &= 5\,\textbf{Spanne}.
\end{aligned}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned}
140\,\textbf{Pollici} &= 7 \cdot 20\,\textbf{Pollici} =\\
&= 7 \cdot 21\,\textbf{Mignoli} = 49 \cdot 3\,\textbf{Mignoli} =\\
&= 49 \cdot 2\,\textbf{Indici} = 14 \cdot 7\,\textbf{Indici} =\\
&= 14 \cdot 5\,\textbf{Spanne} = 70\,\textbf{Spanne}.
\end{aligned}$$

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: 10.
Poiché
$$8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2,$$
i divisori positivi dispari di 8100 che sono multipli di 5 sono tutti e soli i numeri del tipo:
$$3^\alpha \cdot 5^\beta$$
con $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ e $\beta = 1, 2$. Di conseguenza i casi possibili sono $5 \cdot 2$, cioè 10.

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: 5.
Dire che la media complessiva è 80 equivale a dire che la somma di tutti i 18 voti è $18 \cdot 80$, cioè 1440.
Analogamente, dire che la media dei voti dei 10 maschi è 76 equivale a dire che la somma dei loro voti è $10 \cdot 76$, cioè 760.
Di conseguenza la somma dei voti delle 8 ragazze è $1440 - 760$, cioè 680.
Visto che la somma è 680 non ci possono essere 7 ragazze che hanno preso 100.
Ma non possono essercene nemmeno 6 perché altrimenti le due rimanenti non potrebbero avere entrambe un voto non minore di 60.
Invece può essere che 5 ragazze abbiano preso 100 e 3 abbiano preso 60.
Quindi ci possono essere al massimo 5 ragazze che hanno preso 100.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: 2036.
Poiché, in base 2, si ha
$$n_k = \overbrace{111\ldots1}^{k}$$
aggiungendo 1 ad ambo i membri si ottiene (sempre scrivendolo in base 2) che:
$$n_k + 1 = 1\overbrace{000\ldots0}^{k}$$
perché, quando facciamo la somma in colonna di due numeri in base 2, sappiamo che $1 + 1$ dà 0 col riporto di 1.
Questo significa che
$$n_k + 1 = 2^k$$
cioè
$$n_k = 2^k - 1$$
Ma allora:
$$\begin{aligned} & n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{10} = \\ & \quad = \left(2^1 - 1\right) + \left(2^2 - 1\right) + \left(2^3 - 1\right) + \ldots + \left(2^{10} - 1\right) \\ & \quad = \left(2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}\right) - 10 \end{aligned} \tag{1}$$
Si noti ora che la rappresentazione in base 2 di
$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$$
è
$$\overbrace{111\ldots1}^{10}0$$
e quindi, ragionando come prima, si ottiene che il suo valore è $2^{11} - 2$.
Questo significa che la somma (1) vale $2^{11} - 12$, cioè 2036.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: 26.
Per contare più agevolmente le tassellazioni distinguiamo 2 casi, a seconda che ci sia o no un tassello a cavallo del segmento segnato in grigio in figura 4.

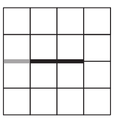

figura 4

Se c'è, cioè se siamo nel caso seguente:

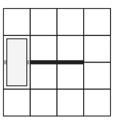

figura 5

allora la posizione di tutti gli altri tasselli è forzata, come vediamo qui di seguito:

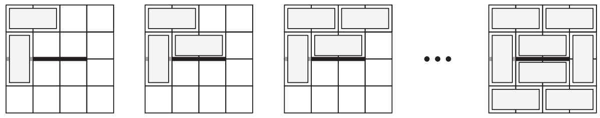

figura 6

Di conseguenza c'è un solo ricoprimento di tasselli che ha un tassello piazzato come in figura 5.
Se invece siamo nel caso in cui non c'è un tassello a cavallo del segmento grigio, non può essercene nemmeno uno piazzato come nella figura seguente:

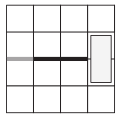

figura 7

altrimenti rimarrebbero da tassellare separatamente due zone di griglia con un numero dispari di caselle. Ma ciò è impossibile perché ogni tassello copre 2 caselle.
Ci ritroviamo quindi nella situazione di dover tassellare separatamente le due parti in cui la griglia è divisa dal segmento nero orizzontale nella figura seguente:

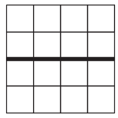

figura 8

Basterà quindi trovare il numero di tassellazioni della griglia seguente:

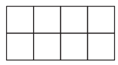

figura 9

e poi farne il quadrato.
Per contarle distinguiamo i casi a seconda di come è piazzato il tassello che copre la casella in alto a sinistra. I due casi sono i seguenti:

figura 10

Nel primo di tali casi la tassellazione può essere completata solo nei 2 modi seguenti:

figura 11

Nel secondo caso invece i modi di completarla sono 3:

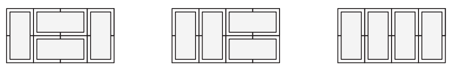

figura 12

Quindi i modi di tassellare la griglia di figura 9 sono 5.
Di conseguenza le tassellazioni della griglia in figura 8 senza tasselli a cavallo del segmento nero sono 5^2, cioè 25.
Se ad esse aggiungiamo l'unica tassellazione che soddisfa la condizione di figura 5, otteniamo che le tassellazioni richieste sono in tutto 26.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: 121.
Osseviamo che:
$$60060 = 60 \cdot 1001 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$
Le coppie (a, b) che dobbiamo contare sono tutte e sole quelle del tipo:
$$\begin{cases} a = 6 \cdot A \\ b = 6 \cdot B \end{cases}$$
con $A < B$ dove A e B sono divisori di 10010 primi tra loro. Basterà quindi contare in quanti modi posso scegliere la coppia (A, B). Per un attimo omettiamo

la condizione $A < B$ e contiamole tutte. Osserviamo che

$$10010 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$

e che, dovendo essere A e B primi tra loro, ciascuno dei fattori primi di 10010 potrà essere o un fattore di A o un fattore di B o di nessuno dei due. Siccome i fattori primi sono 5, i casi possibili sono in tutto 3^5. Di essi però dobbiamo tenere solo quelli tali che $A < B$. A tale scopo però basta osservare che, tolta la coppia $(A, B) = (1, 1)$, tutte le altre, per simmetria, soddisfano per metà la condizione $A < B$ e per metà la condizione $A > B$.
Quelle che dobbiamo contare sono quindi $\dfrac{3^5 - 1}{2}$, cioè 121.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 4.
Vogliamo trovare, facendo meno calcoli possibile, che:

$$n = 7^3 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 79.$$

Ovviamente non conviene l'utilizzo della forza bruta, cioè non conviene calcolare esplicitamente

$$n = p(19, 18) = \ldots = 13003657 \tag{2}$$

e poi fattorizzarlo coi metodi imparati alla scuola media.
Meglio invece cercare prima di fattorizzare il polinomio e solo dopo sostituire i valori $x = 19$ e $y = 18$.
A tale scopo si osservi che, se $x \neq y$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
p(x, y) &= x^5 + x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5 = \\
&= \frac{(x - y)\left(x^5 + x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5\right)}{x - y} = \\
&= \frac{x^6 - y^6}{x - y} = \\
&= \frac{\left(x^3 - y^3\right)\left(x^3 + y^3\right)}{x - y} = \\
&= \frac{(x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)}{x - y} = \\
&= \left(x^2 + xy + y^2\right)(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
p(19, 18) &= \left(19^2 + 19 \cdot 18 + 18^2\right)(19 + 18)\left(19^2 - 19 \cdot 18 + 18^2\right) \\
&= (361 + 342 + 324)(19 + 18)(361 - 342 + 324) \\
&= 1027 \cdot 37 \cdot 343
\end{aligned} \tag{3}$$

In questo modo il numero (enorme) che troviamo in (2) risulta già scomposto nel prodotto di 3 numeri più piccoli, fattorizzabili facilmente con i soliti metodi, cosicché la (3) diventa:

$$p(19, 18) = \ldots = 1027 \cdot 37 \cdot 343 = (79 \cdot 13) \cdot 37 \cdot \left(7^3\right) = 7^3 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 79.$$

Quindi nella sua fattorizzazione compaiono 4 diversi numeri primi.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 52.
Indichiamo con x, y e z rispettivamente lunghezza, larghezza e altezza del parallelepipedo. A meno di rotazioni del parallelepipedo possiamo sempre supporre che valga la condizione:

$$x \leq y \leq z. \tag{4}$$

La condizione che i cubetti sono in tutto 60 diventa

$$xyz = 60 \tag{5}$$

mentre quella che la superficie totale è 104 diventa

$$xy + xz + yz = 52. \tag{6}$$

Cerchiamo quindi tutte le eventuali terne (x, y, z) di interi strettamente positivi tali che valgano (4), (5) e (6).
Si noti che non può essere $x \geq 4$, altrimenti da (4) seguirebbe che $xyz \geq x^3 \geq 64$, in contraddizione con (5).
Quindi i casi possibili per x sono solo tre: $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.
Il caso $x = 1$ però è impossibile perchè da (5) seguirebbe $yz = 60$, che non può essere, visto che dalla (6) segue che $yz < 52$.
Anche il caso $x = 3$ è impossibile perchè da (5) seguirebbe $yz = 20$, cosicché la (6) diventerebbe

$$3y + 3z + 20 = 52,$$

cioè

$$3(y + z) = 32,$$

che non può essere, perché $y + z$ è intero ma 32 non è divisibile per 3.
Rimane solo il caso $x = 2$ dal quale, grazie a (5), segue

$$yz = 30 \tag{7}$$

che, sostituito in (6), ci fornisce

$$2y + 2z + 30 = 52,$$

cioè

$$y + z = 11. \tag{8}$$

Con pochi tentativi si trova subito che gli unici interi positivi y e z, con $y \leq z$, che soddisfano (7) e (8) sono $y = 5$ e $z = 6$.
Di conseguenza la somma dei 12 spigoli del parallelepipedo è

$$4x + 4y + 4z = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 52.$$

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è: 16.
Osserviamo che, se di un numero intero positivo M conosciamo la fattorizzazione

$$M = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

allora i suoi divisori sono tutti e soli i numeri del tipo:

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

con $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, ..., $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$.
Di conseguenza il numero dei divisori positivi di M, che si indica con $d(M)$, è dato da:

$$d(M) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)\,. \tag{9}$$

Come immediato effetto collaterale di tale formula possiamo affermare che:

(10) *se nella fattorizzazione di M ci sono k numeri primi allora si può sempre scrivere $d(M)$ come prodotto di k numeri interi maggiori di* 1.

Come conseguenza di (10), siccome

$$d(30n) = 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

segue che la fattorizzazione di $30n$ contiene al massimo 3 numeri primi. Ma poiché è un multiplo di 30, contiene sicuramente almeno 2, 3 e 5, quindi si avrà:

$$30n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \tag{11}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \geq 1$ e quindi

$$n = 2^{\alpha - 1} \cdot 3^{\beta - 1} \cdot 5^{\gamma - 1} \tag{12}$$

Applicando la formula (9) alla (11) di ottiene

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1) = d(30n) = 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

e quindi, a meno di permutazioni, si ha:

$$(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1) = (3, 3, 5)$$

A questo punto, applicando la formula (9) alla (12) di ottiene:

$$d(n) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16.$$

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: 8072.
Per cominciare, $\lambda = 4036 = 2 \cdot 2018$ non va bene.
Infatti sia $\mathcal{I}$ una configurazione di 2019 punti tale che 4 punti sono vertici di un quadrato $\mathcal{Q}$ di area 4036 e tutti gli altri sono interni a $\mathcal{Q}$.
Tale configurazione soddisfa l'ipotesi richiesta visto che, comunque si scelga una terna di punti di $\mathcal{I}$, il triangolo di cui sono vertici è contenuto in $\mathcal{Q}$ e quindi la sua area non supera la metà dell'area di $\mathcal{Q}$, cioè 2018.
Tuttavia ogni triangolo che contenga $\mathcal{I}$ deve contenere anche $\mathcal{Q}$ e quindi ha area strettamente maggiore di quella di $\mathcal{Q}$, che è 4036.
Quindi, per $\lambda = 4036$, esistono configurazioni di punti di $\mathcal{I}$ che rendono falsa l'affermazione.
A maggior ragione vanno male anche tutti i valori di λ che sono minori di 4036.
Mostriamo invece che se $\lambda = 4 \cdot 2018 = 8072$, l'affermazione è vera, cioè che, qualunque sia la configurazione dei punti di $\mathcal{I}$, è sempre possibile trovare un triangolo di area non superiore a 8072 che li contiene tutti.
Se tutti i 2019 punti sono allineati l'affermazione è ovvia, quindi senza perdere di generalità possiamo restringerci al caso in cui esistono in $\mathcal{I}$ terne di punti che sono vertici di un triangolo di area strettamente positiva.
Visto che $\mathcal{I}$ è un insieme finito si può sempre trovare una terna di punti (A, B, C) in modo che:

(13) il triangolo ABC ha area massima tra tutti i triangoli che hanno per vertici 3 punti di $\mathcal{I}$.

Inoltre per ipotesi sappiamo che:

(14) il triangolo ABC ha area minore o uguale a 2018.

Se per ciascun vertice di ABC mandiamo la parallela al lato opposto otteniamo un nuovo triangolo DEF:

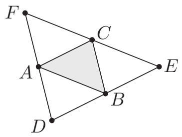

figura 13

È facile mostrare che i 4 triangoli in cui DEF rimane diviso dai lati di ABC sono uguali. Ad esempio ABC è uguale ad ECB perché $ABEC$ è un parallelogrammo. Di conseguenza l'area di DEF è il quadruplo di quella di ABC e quindi non supera $4 \cdot 2018$, cioè 8072.
Basterà quindi mostrare che $\mathcal{I}$ è contenuto in DEF.
A tale scopo osserviamo che se un punto P di $\mathcal{I}$ non fosse contenuto in DEF allora almeno una delle 3 rette su cui giacciono i 3 lati del triangolo DEF deve lasciare P e il triangolo da parti opposte. Ad esempio, in figura 14, la retta è quella del lato EF.

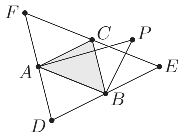

figura 14

Ma allora l'area del triangolo ABP sarebbe maggiore dell'area di ABC, perché rispetto alla base AB ha altezza maggiore. Ma questo contraddice (13). Quindi è assurdo supporre che $\mathcal{I}$ non sia contenuto in ABC.
Abbiamo quindi dimostrato che, comunque siano disposti i punti di $\mathcal{I}$, è sempre possibile trovare un triangolo di area 8072 che li contiene tutti.
D'altra parte abbiamo già esibito una configurazione di punti che non è possibile racchiudere in un triangolo di area 4036, quindi il minimo, tra i valori proposti, che rende vera l'affermazione richiesta è $\lambda = 8072$.
Questo basta per rispondere al quesito proposto, tuttavia segnaliamo che $\lambda = 8072$ è il minimo valore che va bene non solo tra quelli proposti, ma in generale. Infatti, con un po' di fatica in più, si sarebbe potuto anche dimostrare che la configurazione esibita all'inizio non può essere contenuta in nessun triangolo di area minore di 8072.