Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

19 febbraio 2019

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:________ Cognome:________ Genere: [F] [M]

Indirizzo:________ Città:________

Scuola:________ Anno di corso: [1] [2] [3] [4] [5] Città:________

Email:________ Taglia per eventuale maglietta: [S] [M] [L] [XL]

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 18.30 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Alberto Alfarano, Alessandro Iraci, Alessandro Oberti, Alessandro Piccaro, Alessandro Seccarelli, Alessio Bernazzi, Andrea Ciprietti, Andrea Dalzotto, Andrea Gallese, Bernardo Forni, Edoardo Bertoletti, Federica Bertolotti, Federico Glaudo, Federico Poloni, Federico Viola, Filippo Girardi, Francesca Rizzo, Francesco Ballini, Gabriele Manganelli, Giacomo Vizzari, Giona Micossi, Giorgio Navone, Giovanni Acerbi, Giovanni Barbarino, Giulia Trevisan, Giuseppe Di Fabio, Giuseppe Mascellani, Giuseppe Romanazzi, Jacopo D'Aurizio, Kirill Kuzmin, Linda Friso, Lorenzo Benedini, Lorenzo Furio, Luca Francesco D'Alessandro, Lucio Tanzini, Ludovico Pernazza, Marco Vergamini, Maria Bevilacqua, Maria Chiara Ricciuti, Matteo Dell'Acqua, Matteo Protopapa, Matteo Rossi, Michele Longo, Nikita Deniskin, Sandro Campigotto, Simone Masserini, Simone Pelizzola.

Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Luigi ha disegnato sul proprio quaderno un triangolo isoscele ABC in cui i lati uscenti da A sono uguali e, dopo aver tracciato la bisettrice interna all'angolo $\widehat{ABC}$ che interseca il lato AC in P, si è accorto che la circonferenza per B, P, C passava anche per il punto medio di AB. Si è allora domandato quale fosse il valore dell'angolo $\widehat{BAC}$. Qual è la risposta corretta?

   (A) 30° **(B)** 45° **(C)** 60° **(D)** 90° **(E)** 105°

2. Alessandra scrive sul quaderno (di Luigi) tutti i numeri naturali n che hanno entrambe le seguenti proprietà: n ha esattamente 4 divisori positivi (compresi 1 e n stesso), e la somma dei divisori positivi di n fa 42. Quanto vale la somma di tutti i numeri scritti da Alessandra?

   (A) 0 **(B)** 12 **(C)** 20 **(D)** 26 **(E)** 42

3. Nel cassetto di Alice ci sono 30 calzini di 5 colori: 6 bianchi, 6 gialli, 6 rossi, 6 verdi e 6 azzurri. Il fratellino birichino prende 10 buste nere e inserisce in ogni busta tre calzini (presi dal cassetto) di tre colori diversi. Ora Alice deve andare a Cesenatico e dovrà avere in valigia almeno tre paia di calzini di tre colori diversi (i due calzini di ogni paio devono essere dello stesso colore). Quante buste deve prendere Alice, come minimo, per essere sicura di avere tutti i calzini che le servono?

   (A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

4. È data una sequenza di 2019 numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2019}$. Si sa che scelti qualsiasi 4 termini consecutivi della sequenza, la loro somma è costante. Similmente, presi due numeri consecutivi, la loro differenza in valore assoluto è costante (cioè $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = \ldots$).

   Si sa inoltre che $a_1 < a_2 < a_3$ e che $a_2 = 6$. Quanto vale la somma di tutti i numeri della sequenza?

   (A) 2019 **(B)** 2020 **(C)** 4038 **(D)** 12114 **(E)** I dati non sono sufficienti per determinarlo

5. Alla Scuola Normale, gli immatricolati di quest'anno nella classe di Scienze sono di quattro tipi: Matematici, Fisici, Chimici e Biologi. A mensa si ritrovano seduti tutti assieme intorno ad un tavolo rotondo; ognuno di essi ha esattamente una persona seduta di fronte a sé, ed inoltre per ogni studente l'insieme costituito da lui stesso, il suo vicino destro, il suo vicino sinistro e lo studente seduto di fronte comprende tutti e quattro i tipi di allievi. Quanti possono essere gli immatricolati nella classe di Scienze, opportunamente divisi tra i quattro tipi, sapendo che sono tra 30 e 50 (estremi inclusi)? Si dia come risultato la somma di tutte le possibili risposte.

   (A) 40 **(B)** 80 **(C)** 120 **(D)** 200 **(E)** 440

6. La calcolatrice di Pierino ha un display, che inizialmente mostra il numero 0, e due tasti: il tasto $\boxed{+1}$, che aggiunge 1 al numero scritto sul display, e il tasto $\boxed{\times 3}$, che moltiplica il numero scritto sul display per 3. Se si preme il tasto $\boxed{+1}$ per due volte consecutive, la calcolatrice esplode. Se il display della calcolatrice tiene al più 5 cifre, quanti sono i numeri che Pierino può ottenere con un'opportuna sequenza di tasti (senza far esplodere la calcolatrice)?

   (A) 2048 **(B)** 2187 **(C)** 4096 **(D)** 6561 **(E)** 66666

7. Sia $ABCD$ un trapezio di basi AB e CD inscritto in una circonferenza Γ, tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari. Detto P il punto d'incontro delle diagonali AC e BD, quanto vale il rapporto fra l'area di Γ e la somma delle aree dei triangoli APB e CPD?

   (A) 1 **(B)** $\pi/2$ **(C)** π **(D)** 2π **(E)** I dati non sono sono sufficienti per determinarlo

8. Alberto, Barbara e Carlo fanno un gioco. Questo gioco si compone di k turni, al termine di ciascuno dei quali il primo classificato riceve a_1 punti, il secondo a_2 e il terzo a_3, con $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ tutti interi. I punteggi finali di Alberto, Barbara e Carlo sono rispettivamente 22, 9, 9. Sapendo che Barbara ha vinto il primo turno, chi è arrivato secondo nel secondo turno?

   (A) Necessariamente Alberto **(B)** Necessariamente Barbara **(C)** Necessariamente Carlo **(D)** Possono essere arrivati secondi sia Alberto sia Barbara **(E)** Possono essere arrivati secondi sia Carlo sia Barbara

9. Marcella, giocando, trova per puro caso due polinomi $p(x)$ e $q(x)$, non costanti e a coefficienti interi, verificanti la relazione:

$$p(q(x+1)) = p(x^3)q(x+1)^5 \ .$$

Che cosa possiamo affermare con certezza dei due polinomi trovati da Marcella?

(A) Il coefficiente direttore di $p(x)q(x)$ è positivo **(B)** Il polinomio $q(x)$ non possiede radici intere **(C)** Il grado di $q(x)$ non supera quello di $p(x)$ **(D)** La somma dei coefficienti di $p(x)$ è dispari **(E)** Il grado di $p(x)q(x)$ è multiplo di 8

10. Jacopo ha a disposizione 6 colori (tra cui il bianco) per colorare tutti i numeri interi. Vuole rispettare però queste condizioni: n e $n + 5$ devono avere lo stesso colore per ogni n intero e inoltre se ab è bianco, allora almeno uno tra a e b deve essere bianco. In quanti modi Jacopo può colorare gli interi?

(A) 156 **(B)** 656 **(C)** 3181 **(D)** 3906 **(E)** 3936

11. La pianta di un castello è realizzata in questo modo: si consideri una circonferenza lunga 2019 metri con inscritto un poligono regolare di 2019 vertici. Una volta numerati i vertici del poligono da 1 a 2019 in senso orario si traccino delle circonferenze di lunghezza $2019m$ centrate in ogni punto numerato con un quadrato perfetto. La pianta del castello consiste nell'unione di tutti i cerchi disegnati. Quanti metri misura il perimetro del castello?

(A) 2692 **(B)** 4038 **(C)** 4627 **(D)** $\frac{29370}{2\pi}$ **(E)** 2019π

12. Due scuole si scontrano in un torneo di scacchi a cui ciascuna fa partecipare 75 alunni: vengono organizzate 75 partite in cui far giocare tutti gli studenti uno contro uno (un membro della prima scuola contro uno della seconda) sotto il controllo di un arbitro esterno. Ogni scuola numera i propri studenti da 1 a 75 e l'arbitro impone la regola che due ragazzi non si possono scontrare se la differenza tra i loro numeri è un multiplo di 3. Se n è il numero di possibili accoppiamenti che soddisfano questa regola, con quanti zeri termina n?

(A) 6 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 21

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Sull'isola dei Cavalieri e dei Furfanti, i Cavalieri dicono la verità tranne quando si sbagliano ed i Furfanti mentono sempre. Durante una riunione, 40 isolani si siedono attorno a un grande tavolo rotondo e ciascuno dice: "Io sono vicino a un Cavaliere e a un Furfante". Sapendo che 3 Cavalieri presenti si sbagliano, quanti sono i Cavalieri alla riunione?

14. Quante sono le coppie ordinate (x,y) di interi positivi minori o uguali a 2019 tali che $x + y$ e $xy + 1$ siano potenze di 2?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Ci sono 4037 lampadine disposte in fila e numerate da 1 a 4037. Inizialmente ogni lampadina può essere accesa o spenta. Una mossa consiste nello scegliere due lampadine numerate a, b tali che a/b o b/a sia un numero primo e cambiare lo stato di entrambe. Dimostrare che in un numero finito di mosse si possono rendere le lampadine da 1 a 2019 tutte accese qualunque sia la configurazione iniziale.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo isoscele su base BC e siano D, E punti sui lati AB, BC rispettivamente, tali che che le rette DE e AC risultino parallele. Si consideri inoltre il punto F sulla retta DE che si trova dalla parte opposta di D rispetto ad E ed è tale che FE sia congruente ad AD. Detto O il circocentro del triangolo BDE, dimostrare che i punti O, F, A, D giacciono su una circonferenza.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Diciamo che un numero intero positivo con un numero pari di cifre è "corretto" se, leggendo ad alta voce le singole cifre, otteniamo una corretta decrizione del numero stesso. O meglio, se ogni cifra in posizione dispari indica quante volte compare la cifra successiva in tutto il numero.
Ad esempio, 1210 è corretto, perché ha "un 2, uno 0", così come 2121, perché ha "due 1, due 1", mentre 1031 non lo è, perché dichiara di avere "uno 0, tre 1", quando ha in realtà due 1.

(a) Dimostrare che ci sono più di 2019 numeri corretti.

(b) Dimostrare che gli interi corretti sono in numero finito.

(c) Trovare il numero di cifre del più grande numero corretto.

SOLUZIONE:

Nome:______________________________ Cognome:____

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(C)**. Sia M il punto medio di AB. Gli angoli $\widehat{PBM}$ e $\widehat{PCM}$ sono congruenti perché insistono sullo stesso arco. Dal momento che il triangolo è isoscele, gli angoli $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACB}$ sono uguali e quindi, per differenza di angoli uguali, $\widehat{MCB} = \widehat{PBC}$ e M è anche piede della bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB}$, così come P è anche punto medio del lato AC, essendo i due triangoli MBC e BCP congruenti. Siccome CM è sia mediana sia bisettrice, il triangolo ABC è isoscele in C, cioè i lati BC e AC sono uguali. Allora ABC è equilatero e l'angolo cercato ha ampiezza pari a $60°$.

2. La risposta è **(D)**. Se n ha quattro divisori positivi, essi sono, in ordine crescente, 1, p, q, n con p numero primo.

   Se q è un numero primo, possiamo concludere che $n = p \cdot q$, perché n non ha altri divisori. La somma dei divisori positivi è $1 + p + q + p \cdot q = (1 + p) + q(1 + p) = (1 + p)(1 + q)$ che per ipotesi deve valere $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Né $(1 + p)$, né $(1 + q)$ possono essere uguali a 1 e nemmeno a 42, altrimenti l'altro sarebbe uguale a 1. Avendo 42 solo tre fattori primi, uno di essi è uguale a $(1+p)$ o $(1+q)$, e quindi deve essere ancora primo quando diminuito di uno. L'unica possibilità è quindi che $p+1 = 3$ e $q+1 = 2 \cdot 7 = 14$. Siccome $p = 3-1 = 2$ e $q = 14-1 = 13$ sono primi, $n = 2 \cdot 13 = 26$ ha le proprietà cercate.

   Consideriamo ora l'altra possibilità, che q non sia un numero primo. Allora q ha come divisori solo 1, p e se stesso, altrimenti altri divisori dividerebbero anche n. Dunque $q = p^2$ e $n = p^3$. La somma dei divisori positivi è $1+p+p^2+p^3 = 1+p(1+p+p^2) = 42$, allora $p(1+p+p^2) = 41$. Ma, dal momento che 41 è un numero primo, in questo caso non esistono soluzioni.

3. La risposta è **(C)**. Osserviamo che, se Alice prende 3 buste, non può essere sicura di avere le 3 paia di calzini che le servono: ad esempio la prima busta potrebbe contenere un calzino bianco, uno giallo e uno rosso, la seconda uno bianco, uno giallo e uno verde e la terza uno bianco, uno giallo e uno azzurro, e ci sarebbero solo due paia ben assortite (uno bianco e uno giallo).

   Se Alice prende 4 buste, vediamo che in ogni caso trova le 3 paia che le servono. Chiamiamo i tre colori (distinti) dei calzini presenti nella prima busta A, B e C; chiamiamo D ed E i due colori che non compaiono della prima busta. La seconda busta deve avere almeno un colore in comune con la prima, diciamo A, di cui abbiamo quindi il paio. Se non ha altri colori in comune, i suoi colori sono A, D ed E, quindi con la terza busta otteniamo le altre due paia (almeno due calzini non sono A e quindi si appaiano con calzini non A trovati in precedenza). Se la seconda busta ha almeno un altro colore in comune, diciamo B, abbiamo il paio anche di tale colore. Resta da trovare il terzo paio: osservando che ognuna delle 4 buste contiene almeno un calzino di colore diverso da A e da B, tra questi calzini ce ne devono essere due dello stesso colore (ci sono solo 3 colori disponibili, ovvero C, D ed E) e allora tali calzini saranno il terzo paio. Il minimo numero di buste richiesto è dunque 4.

4. La risposta è **(D)**. Dato che la somma di 4 termini consecutivi è costante, per ogni $n \geq 1$ abbiamo $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}$, da cui $a_n = a_{n+4}$, cioè la sequenza è periodica e si ripete dopo 4 termini. Poiché vale $a_1 < a_2 < a_3$, le differenze $a_2 - a_1$ e $a_3 - a_2$ sono positive e, per ipotesi, uguali a una costante d. Poiché $a_2 = 6$, possiamo scrivere $a_1 = 6-d$, $a_3 = 6 + d$ e otteniamo $a_5 = a_1 = 6 - d$ per la periodicità; $a_4 - a_3 = \pm d$, quindi $a_4 = 6 + 2d$ o $a_4 = 6$. Nel primo caso avremmo $a_4 - a_5 = 3d$, assurdo, dunque necessariamente $a_4 = 6$. La sequenza è quindi $6 - d$,6,$6 + d$,6,$6 - d$,$6 \ldots 6 - d$,6,$6 + d$ (siccome i termini sono 2019 che dà resto 3 se diviso per 4). In ogni blocco da 4 e nell'ultimo da 3 gli elementi $6 - d$ e $6 + d$ hanno somma $12 = 6 \cdot 2$ e dunque la somma totale è $2019 \cdot 6 = 12114$ indipendentemente da d.

5. La risposta è **(B)**. Siano m il numero di Matematici e n il numero totale di immatricolati.

   Se per ogni matricola consideriamo il gruppo costituito da questa, il suo vicino destro, il suo vicino sinistro e la persona di fronte, abbiamo n gruppi, ciascuno dei quali contiene esattamente un Matematico. D'altra parte, ogni matricola di Matematica compare in esattamente 4 di questi gruppi (quelli corrispondenti a lei stessa, a ciascuno dei due vicini e allo studente seduto di fronte), da cui $n = 4m$.

Consideriamo ora quattro persone sedute una accanto all'altra in senso antiorario, che chiamiamo a_1, a_2, a_3, a_4. Senza perdere generalità possiamo dire che le prime tre sono nell'ordine dei gruppi F, M, e C. La persona a_4, però, potrebbe essere F o B: mostriamo ora che è necessariamente il secondo caso.

Chiamiamo b_i chi siede dirimpetto ad a_i. Allora b_2 è necessariamente B. Se consideriamo b_3, che siede accanto a b_2 in senso antiorario, non può essere B o M, per le condizioni date da b_2, ma nemmeno C, poiché siede dirimpetto ad a_3, che è C. Quindi b_3 è F e, analogamente, b_1 è C. Guardiamo ora b_4: dalle condizioni su b_3 dobbiamo escludere F, C e B, quindi non può che essere M. Ma allora a_4, che gli siede di fronte, non può essere M e deve essere B.

Quindi scegliere il tipo di tre persone blocca anche la quarta e, conseguentemente tutto il resto. Dobbiamo però controllare che i pattern si "incastrino" bene, visto che dobbiamo rispettare la condizione su chi siede di fronte.

Numeriamo le sedie attorno al tavolo da 0 a $4m-1$. La persona seduta dirimpetto a 0 è $2m$ e, in generale, la persona seduta davanti a k è $2m+k$. Osserviamo che persone i cui posti hanno il numero nella stessa classe di resto modulo 4 hanno matricole dello stesso tipo. Quindi è necessario che la classe di resto modulo 4 di k e $2m+k$ sia diversa. Se $m=2h$, allora $2m+k=4h+k \equiv_4 k$, assurdo. Se invece $m=2h+1$, allora $2m+k=4h+2+k \equiv_4 k+2$. Le persone al tavolo, quindi, possono essere in un numero che sia multiplo di 4 ma non di 8. Tra 30 e 50 i numeri con queste caratteristiche sono 36 e 44, la cui somma dà 80.

6. La risposta è **(A)**. I numeri che si possono ottenere con un'opportuna sequenza di tasti $\boxed{+1}$ e $\boxed{\times 3}$ senza due $\boxed{+1}$ consecutivi sono tutti e soli quelli che in base 3 si scrivono con solo cifre 0 e 1. Infatti, dato un tale numero, per ottenerlo sulla calcolatrice basta scorrere da sinistra a destra le cifre della sua rappresentazione in base 3 e premere $\boxed{+1}$ per il primo 1, in seguito $\boxed{\times 3}$ ogni volta che si incontra uno 0, $\boxed{\times 3}$ e poi $\boxed{+1}$ ogni volta che si incontra un 1. In base 3, infatti, moltiplicare per 3 significa spostarsi di una posizione verso sinistra. In questo modo, ad ogni stringa di 0 e 1 in base 3 è associata una sequenza di tasti che fa ottenere il numero corrispondente senza far esplodere la calcolatrice. È vero anche il viceversa: le sequenze di tasti coinvolte sono tutte e sole quelle senza due $\boxed{+1}$ consecutivi, che inserirebbero un 2 tra le cifre del numero. Resta quindi soltanto da contare quanti numeri con al più 5 cifre in base 10 si scrivono in base 3 con solo cifre 0 e 1. Notiamo che $3^{11} > 10^5$ mentre $3^{10} + 3^9 + ... + 3^0 = \frac{3^{11}-1}{2} < 10^5$, quindi si tratta di tutti e soli quelli con al più 11 cifre in base 3. Dato che ci sono 2 scelte (0 e 1) per ogni cifra, tali numeri sono $2^{11} = 2048$. Osserviamo che in questo modo sono stati contati sia i numeri con 11 cifre (con la prima cifra uguale a 1), sia quelli con meno di 11 cifre (che corrispondono a quelli con 11 cifre ma con un opportuno numero di zeri iniziali).

7. La risposta è **(C)**. Siano O e r rispettivamente il centro e il raggio della circonferenza Γ. Osserviamo che necessariamente il trapezio è isoscele (perché inscrivibile in una circonferenza), quindi le diagonali sono uguali e $AP = PB$ (quindi anche $PC = PD$) . Quindi i triangoli APB e BPC sono isosceli e rettangoli: hanno area rispettivamente $\frac{BP^2}{2}$ e $\frac{PC^2}{2}$.

   Inoltre, poiché il triangolo APB è isoscele e rettangolo, troviamo $45° = \widehat{PAB} = \widehat{CAB} = \frac{\widehat{COB}}{2}$: ovvero $\widehat{COB} = 90°$. Con il teorema di Pitagora sui triangoli BPC e BOC troviamo che: $2r^2 = BC^2 = BP^2 + PC^2$.

   La somma delle aree dei triangoli APB e BPC è pari a $\frac{BP^2+PC^2}{2} = r^2$ e il rapporto cercato vale $\frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$.

8. La risposta è **(C)**. Notiamo che durante il gioco vengono assegnati $k(a_1+a_2+a_3)$ punti in totale, quindi possiamo scrivere $k(a_1+a_2+a_3) = 22+9+9 = 40$, da cui deduciamo che k e $a_1+a_2+a_3$ sono entrambi divisori di 40. Notiamo inoltre che siccome a_1, a_2, a_3 sono interi positivi distinti e $a_1 > a_2 > a_3$ si deve avere $a_3 \geq 1$, $a_2 \geq 2$ e $a_1 \geq 3$, quindi $a_1 + a_2 + a_3 \geq 6$. Abbiamo quindi $k \leq \frac{40}{6}$, ed elencando i divisori di 40, k può essere 1, 2, 4, 5. Ragioniamo ora per casi:

   - $k = 1$ è chiaramente impossibile, altrimenti si avrebbe $a_2 = a_3 = 9$, ma per ipotesi $a_2 > a_3$.

- $k = 2$ è impossibile, altrimenti si avrebbe $2a_1 \geq 22$ per dare abbastanza punti ad Alberto, ma anche $a_1 < 9$ perché Barbara ha vinto un turno, assurdo.
- $k = 4$ è impossibile, infatti si avrebbe $a_1+a_2+a_3 = 10$ e le uniche terne possibili sono (5,3,2), (5,4,1), (6,3,1), (7,2,1). Le prime due sono escluse perché Alberto, anche con 4 vittorie, non potrebbe ottenere 22 punti. La terza è esclusa perché Alberto, per ottenere 22, dovrebbe necessariamente avere almeno 3 vittorie, ma aggiungendo un secondo posto arriverebbe a 21 e aggiungendo una quarta vittoria a 24. La quarta è esclusa perché, siccome Barbara ha vinto un turno, il suo punteggio dovrebbe essere almeno $7 + 1 + 1 + 1 > 9$, assurdo.
- $k = 5$ è possibile, infatti abbiamo $a_1+a_2+a_3 = 8$ e le terne possibili sono (4,3,1), (5,2,1). Il primo caso è escluso perché Alberto non potrebbe raggiungere un punteggio di 22 nemmeno con 5 vittorie. Il secondo caso invece va bene, infatti Alberto per ottenere 22 deve avere per forza 4 vittorie e un secondo posto e, siccome per ipotesi Barbara ha vinto il primo turno, la classifica del primo turno è per forza Barbara-Alberto-Carlo. A questo punto Carlo dev'essere per forza arrivato secondo in tutti gli altri turni e quindi in particolare nel secondo.

9. La risposta è **(E)**. Siano m, n i gradi di $p(x)$ e $q(x)$, rispettivamente. Essi sono due interi positivi. La relazione tra i polinomi data nel problema implica la seguente equazione sui gradi, $mn = 3m + 5n$, che a sua volta equivale a $(m - 5)(n - 3) = 15$. Per ricavare (m,n) dobbiamo dunque risolvere i sistemi

$$\begin{cases} m - 5 = k \\ n - 3 = \frac{15}{k} \end{cases}$$

al variare di k fra i divisori di 15, cioè $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Osserviamo però che, quando k è negativo, almeno uno fra m ed n risulta negativo o nullo. Perciò scartiamo questi casi e consideriamo solamente i restanti quattro sistemi, da cui ricaviamo le seguenti soluzioni:

m	6	8	10	20
n	18	8	6	4

Ora possiamo notare che in corrispondenza di ciascuna coppia (m,n) esistono effettivamente due polinomi $p(x) = x^m, q(x) = (x - 1)^n$ di gradi m,n che soddisfano la relazione assegnata. Con questi esempi riusciamo già ad escludere le risposte (B) e (C). Per quanto riguarda (A) e (D) basta osservare che, se $(p(x),q(x))$ soddisfa la condizione di Marcella, lo stesso vale per i polinomi $(\lambda p(x), q(x))$ qualunque sia l'intero $\lambda \neq 0$: pertanto $(-x^m,(x - 1)^n)$ e $(2x^m,(x - 1)^n)$ sono due facili controesempi. Infine, il grado di $p(x)q(x)$ è $m + n$ e può valere soltanto 16 o 24, da cui l'esattezza di **(E)**.

10. La risposta è **(E)**. La condizione che n e $n + 5$ hanno lo stesso colore è equivalente a restringere il problema alle 5 classi di congruenza modulo 5 (che continueremo a chiamare 0, 1, 2, 3, 4). Studiamo ora la seconda condizione; scriviamo tutti i possibili modi per ottenere un numero come prodotto di altri due: $0 \equiv 0 \cdot k$ con $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $1 \equiv 1 \cdot 1 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 4$; $2 \equiv 1 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 4$; $3 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 4$; $4 \equiv 1 \cdot 4 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 3$. Ogni congruenza implica che se il prodotto è bianco allora uno dei due fattori è bianco. Si vede come il colore di 0 non influisce sui colori delle altre classi. Invece se 1 è bianco, allora anche 4 è bianco; se 4 è bianco allora sia 2 che 3 sono bianchi; se 2 (o 3) è bianco allora o è bianco 3 (o 2) o è bianco 4, ma 4 bianco implica sia 2 che 3 bianco. Riassumendo, se 1 è bianco, allora anche 2, 3 e 4 lo sono. Se 4 è bianco, ma 1 non lo è, 2 e 3 sono bianchi. Infine se 2 è bianco, ma non lo sono né 1 né 4, lo è anche 3 e viceversa. Abbiamo quindi quattro casi per le classi in $\{1, 2, 3, 4\}$ colorate di bianco: $\{1, 2, 3, 4\}$ o $\{2, 3, 4\}$ o $\{2, 3\}$ o $\emptyset$. Ricordando che 0 può essere colorato indipendentemente, otteniamo $6 \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^4) = 3936$ colorazioni diverse.

11. La risposta è **(B)**. Siano Γ la circonferenza iniziale e $C_1, C_2, \ldots, C_{44}$ le circonferenze disegnate con centro nei vertici del poligono etichettati con quadrati perfetti; si noti che, dato che il raggio R di ciascuna circonferenza C_i è uguale al raggio di Γ (tutte le circonferenze hanno perimetro $2019 = 2\pi R$), C_i passa per il centro di Γ, che chiameremo O. Notiamo anche che per ogni i le

circonferenze C_i e C_{i+1} (nel caso $i = 44$ le circonferenze C_{44} e C_1: da ora in poi indicizziamo tutti gli elementi in modo ciclico, cioè poniamo per convenzione $i+1 = 1$ per $i = 44$) si intersecano in un punto P_i al di fuori della circonferenza Γ. Questo perché, detti O_i i centri delle circonferenze, il minimo valore per l'angolo $\widehat{O_iOO_{i+1}}$ tale che l'intersezione di C_i e C_{i+1} diversa da O non si trovi all'esterno di Γ è tale che $OO_i = OP_i = OO_{i+1}$ e vale cioè $2\pi/3$; tuttavia, l'angolo $\widehat{O_iOO_{i+1}}$ vale nel nostro caso al più $\frac{(i+1)^2-i^2}{2019} \cdot 2\pi = \frac{2i+1}{2019} \cdot 2\pi \leq \frac{89}{2019} \cdot 2\pi < 2\pi/3$.

Il perimetro del castello è dunque ottenuto sommando, per i che va da 1 a 44, la lunghezza dell'arco P_iP_{i+1} della circonferenza C_{i+1} che non contiene il punto O; tale lunghezza vale $R\theta_i$, dove θ_i è la misura dell'angolo $P_i\widehat{O_{i+1}}P_{i+1}$ in radianti. Ma, poiché insistono sullo stesso arco di C_{i+1}, abbiamo che l'angolo $P_i\widehat{O_{i+1}}P_{i+1}$ è doppio rispetto all'angolo $\widehat{P_iOP_{i+1}}$; e, sommando per tutti gli i da 1 a 44, si ottiene che $\theta_1 + \ldots + \theta_{44}$ vale quindi 4π (gli angoli $\widehat{P_iOP_{i+1}}$ coprono precisamente un angolo giro). Il perimetro del castello vale dunque $4\pi R$ e, poiché sappiamo che $2\pi R$ vale 2019 metri, la risposta corretta è 4038 metri.

Si noti che il fatto che i centri delle circonferenze fossero certi vertici di un poligono regolare non era determinante per la soluzione di questo problema: lo stesso risultato (il valore di $4\pi R$ per il perimetro) si sarebbe potuto mostrare per un qualunque numero di circonferenze di raggio R che avessero tutte un punto in comune, purché l'angolo formato da tale punto e dai centri di due circonferenze "consecutive" qualunque valesse al più $2\pi/3$.

12. La risposta è **(D)**. Dividiamo i 75 alunni di ognuna delle due scuole in 3 gruppi, a seconda del resto del loro numero quando diviso per 3. In particolare, nella prima scuola, gli alunni sono divisi nei gruppi A, B, C a seconda se il loro numero è del tipo $3k$, $3k+1$ o $3k+2$ per qualche intero k. Analogamente nella seconda scuola gli alunni sono divisi tra A', B', C'.

    Ognuno dei gruppi A, B, C, A', B', C' comprende 25 studenti, e il gruppo A non può sfidare il gruppo A', così come B non può sfidare B' e C non può sfidare C'.

    Supponiamo che m persone del gruppo A sfidino qualcuno in B' e i restanti $25 - m$ sfidino C'. Allora m persone di B sfidano le restanti m in C' e $25-m$ sfidano studenti di A'. Di conseguenza ci sono m persone in C che sfidano il gruppo A' e i restanti $25 - m$ sfidano il gruppo B'. Fissato m, dunque, scegliamo m persone da A, B, C in $\binom{25}{m}^3$ modi. Inoltre scegliamo in che modo le persone in A' sfidano le m scelte in C e le $25 - m$ in B in 25! modi e analogamente per B', C'. Al variare di m, dunque, il numero di possibili accoppiamenti è

    $$n = (25!)^3 \sum_{m=0}^{25} \binom{25}{m}^3.$$

    Notiamo che $\binom{25}{m}$ è divisibile per 5 esattamente se $m \neq 0$ e $m \neq 25$, dunque

    $$\binom{25}{m}^3 = 2 + 5h$$

    non è un multiplo di 5. Il numero n ha quindi tanti fattori 5 quanti ce ne sono in $(25!)^3$, ossia $6 \cdot 3 = 18$. Notiamo che in 25! ci sono almeno 6 fattori 2, per esempio perché comprende $16 \cdot 8$, e pertanto n termina esattamente con 18 zeri.

13. La risposta è **27**.

    Cominciamo con qualche osservazione di base. Non possono esserci solo Cavalieri al tavolo, perché dovrebbero sbagliarsi tutti e non solo 3 di loro. Se guardiamo un Furfante o, equivalentemente, un Cavaliere che sbaglia, accanto a lui siedono o due Furfanti o due Cavalieri.

    Poiché ci sono almeno un Furfante e almeno un Cavaliere (in realtà almeno tre), c'è almeno un Furfante seduto accanto ad un Cavaliere. In particolare i Furfanti (supponendo ce ne siano più di uno) non possono essere seduti vicini, dal momento che quelli "dentro" il gruppo potrebbero mentire, ma quelli sul bordo avrebbero un vicino Furfante e uno Cavaliere, il che è assurdo. Dunque i Furfanti siedono isolati, circondati da Cavalieri.

Di base, senza i cavalieri che sbagliano, avremmo dunque una successione di terzetti della forma CFC.

Facciamo ora entrare in gioco i Cavalieri che sbagliano. Essi possono inserirsi tra due Cavalieri (ad esempio tra due terzetti consecutivi, ma non solo, se ce ne sono più di uno in seguito all'altro) oppure tra due Furfanti, cioè "eliminando" un Cavaliere, nel momento in cui guardiamo due terzetti consecutivi: $CFCCFC$ può essere sostituito da $CF\bar{C}FC$, in cui $\bar{C}$ è il Cavaliere che si sbaglia. Nel primo caso il numero di persone al tavolo aumenta di 1, nel secondo diminuisce di 1 (due Cavalieri vengono "trasformati" in un solo Cavaliere).

Diciamo che ci sono a Cavalieri che si sbagliano del primo tipo, cioè che siedono tra Cavalieri e $3-a$ del secondo, cioè tra due Furfanti. Allora al tavolo sono seduti in $40 = k \cdot 3 + a - (3-a) = 3 \cdot (k-1) + 2 \cdot a$, con $0 \leq a \leq 3$. Siccome 40 ha classe di resto 1 modulo 3, $2a$ ha classe di resto 1 modulo 3, quindi $a = 2$. Questo significa che abbiamo due Cavalieri che si sbagliano circondati da Cavalieri e uno circondato da Furfanti. Prima di considerare i Cavalieri che si sbagliano, avevamo 39 persone sedute attorno al tavolo, di cui 26 Cavalieri e 13 Furfanti. Abbiamo aggiunto due Cavalieri (che si sbagliano) seduti tra altri Cavalieri, portando il totale di Cavalieri a 28, dopodiché il terzo Cavaliere che si sbaglia ha preso il posto di due Cavalieri seduti uno accanto all'altro e con Furfanti a circondarli, cosa che ha ridotto il numero totale di Cavalieri a 27.

14. La risposta è **37**. Supponiamo $x = y$. Allora otteniamo $x^2 + 1$ pari, dunque x dispari. Ma $2x$ con x dispari è potenza di due se e solo se $x = 1$. Ora ci basta contare tutti le coppie (x,y) che verificano le ipotesi con $x < y$. Ciò significa che esistono due interi positivi a e b tali che $x+y = 2^a$ e $xy+1 = 2^b$. Dato che $(x-1)(y-1) \geq 0$, si ha che $b \geq a$. Dalla seconda equazione deduciamo che entrambi i numeri sono dispari, dunque esiste un k dispari tale che $x = 2^{a-1} - k$ e $y = 2^{a-1} + k$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo $2^{2a-2} - k^2 + 1 = 2^b$. Dato che $k = 2m + 1$ abbiamo $4m(m+1) = 2^{2a-2} - 2^b = 2^b(2^{2a-2-b} - 1)$ che implica $m(m+1) = 2^{b-2}(2^{2a-2-b} - 1)$. A questo punto se $m = 0$ otteniamo che le coppie della forma $(2^{a-1} - 1, 2^{a-1} + 1)$, assieme alle loro simmetriche, soddisfano le richieste. Esse sono in numero pari a $2 \cdot 10 = 20$, perché ci vanno bene gli esponenti a inclusi tra 2 e 11. In alternativa abbiamo $m \geq 1$. I fattori m e $m+1$ sono coprimi, dunque uno dei due è divisibile per 2^{b-2}. In entrambi i casi abbiamo che $m \geq 2^{b-2} - 1$. Ma allora $2^{b-2}(2^{2a-2-b} - 1) = m(m+1) \geq 2^{b-2}(2^{b-2} - 1)$ e dunque $2a - 2 - b \geq b - 2$ che implica $a \geq b$. Ma avevamo già osservato che $b \geq a$, dunque $a = b$, ovvero $(x-1)(y-1) = 0$ e dunque le coppie sono del tipo $(1,2^a - 1)$, assieme alle loro simmetriche. Esse sono $2 \cdot 10 - 1 = 19$, poiché vanno bene gli esponenti a inclusi tra 1 e 10, ma dobbiamo contare (1,1) una sola volta, da cui il -1. Dobbiamo però fare attenzione al fatto che abbiamo contato alcune soluzioni sia in questa famiglia, sia nella precedente, cioè (1,3) e (3,1). Il numero totale di coppie che soddisfano le richieste è quindi $20 + 19 - 2 = 37$.

15. Mostriamo direttamente una sequenza di mosse che porta ad avere tutte le prime 2019 lampadine accese.

   - Se la lampadina con il numero 2019 è spenta, scegliamo $a = 2019$ e $b = 673$, in modo che $\frac{a}{b} = 3$ sia un numero primo e cambiamo lo stato di entrambe le lampadine. Ora la lampadina 2019 è accesa.
   - Se la lampadina numero 1 è spenta, scegliamo $a = 2$ e $b = 1$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 1 è accesa.
   - Se la lampadina numero 2 è spenta, scegliamo $a = 4$ e $b = 2$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 2 è accesa.
   - Se la lampadina numero k è spenta, con $1 \leq k \leq 2018$, scegliamo $a = 2k$ e $b = k$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero k è accesa.
   - Se la lampadina numero 2018 è spenta, scegliamo $a = 4036$ e $b = 2018$ e cambiamo lo stato di entrambe. Ora la lampadina numero 2018 è accesa.

Notiamo che ogni lampadina che viene accesa durante una mossa poi non viene più cambiata di stato dalle mosse successive: infatti la lampadina 2019 è cambiata di stato solo al primo

turno perché in tutti i turni successivi vengono utilizzate lampadine della forma k o $2k$ con $1 \leq k \leq 2018$ e 2019 è dispari, mentre se una lampadina k con $1 \leq k \leq 2018$ viene cambiata di stato, nei turni successivi verranno solo considerate lampadine con numeri maggiori di k.
Nota: questa soluzione funziona solo se le mosse vengono applicate nell'ordine descritto sopra, altrimenti si rischierebbe di spegnere nuovamente una lampadina accesa in precedenza.

16. Notiamo che il triangolo BDE è isoscele su base BE. Infatti, considerando i segmenti paralleli ED, CA e il segmento CB, abbiamo $\widehat{ACB} = \widehat{DEB}$. Quindi, dato che $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$, otteniamo $\widehat{DEB} = \widehat{CBA}$.

    Consideriamo ora i triangoli OED e ODB: sono congruenti perché $ED = DB$, $OE = OD$, $OD = OB$. In particolare, $\widehat{DEO} = \widehat{BDO}$.

    Osserviamo infine i triangoli FEO e ADO: hanno $\widehat{OEF} = \widehat{ODA}$ (perché supplementari di angoli congruenti), $OE = OD$ e $EF = AD$. Dunque i due triangoli sono congruenti, ed in particolare $\widehat{EFO} = \widehat{DAO}$, da cui $\widehat{DFO} = \widehat{DAO}$. Dato che F ed A si trovano dalla stessa parte della retta DO, questo mostra che il quadrilatero $OFAD$ è inscrivibile in una circonferenza.

17. (a) Il numero $\mathcal{A} = 12131415161718$ è corretto. Poiché una corretta descrizione del numero non dipende dall'ordine, spezzando $\mathcal{A}$ in blocchi di due cifre consecutive

    $$\boxed{12}\,\boxed{13}\,\boxed{14}\,\boxed{15}\,\boxed{16}\,\boxed{17}\,\boxed{18}$$

    e permutandoli tra loro otteniamo numeri corretti diversi. Il numero di permutazioni di sette blocchi distinti è

    $$7! = 5040 > 2019.$$

    (b) Ogni numero corretto è costituito da blocchi di due cifre $\boxed{ab}$ la cui prima cifra descrive la seconda. Una cifra che viene descritta in un qualche blocco può comparire al più 9 volte in tutto il numero: altrimenti non potrebbe essere stata descritta correttamente nel blocco in questione. Questa osservazione limita immediatamente il numero di blocchi a nove per cifra, ovvero $9 \cdot 10 = 90$, dunque il numero di cifre a $90 \cdot 2 = 180$.

    Gli interi con al più 180 cifre (e, di conseguenza, quelli corretti) sono in numero finito.

    (c) Raffiniamo la stima dall'alto del punto precedente: se un numero naturale ha più di 91 cifre allora, per il principio dei cassetti, c'è una cifra che compare almeno 10 volte e che quindi non può mai essere descritta. Osservando che il numero di blocchi in un numero corretto è al più nove volte il numero di cifre che vengono descritte, otteniamo un limite superiore di $9 \cdot 9 = 81$ blocchi, che corrisponde a un limite di $81 \cdot 2 = 162$ cifre.

    Ci aspettiamo ora che il massimo numero corretto sia

    $$\mathcal{G} = \underbrace{9898\ldots98}_{\text{9 blocchi}}\,\underbrace{9797\ldots97}_{\text{9 blocchi}}\,\ldots\,\underbrace{9090\ldots90}_{\text{9 blocchi}},$$

    ma non sarà necessario dimostrarlo. Una volta osservato che ha $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ cifre, la dimostrazione è conclusa: se anche esistesse un numero corretto più grande di $\mathcal{G}$, questo avrebbe comunque 162 cifre.

Nota. Decomponendo $\mathcal{G}$ nei suoi blocchi e permutandoli in tutti i modi possibili, scopriamo che i numeri corretti sono più di

$$\frac{81!}{(9!)^9} > 10^{70}.$$

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- **10 punti** per esibire una sequenza di mosse che porti ad accendere le lampadine volute qualunque sia lo stato iniziale. Di questi, si assegnino **3 punti** a chi mostri che è possibile cambiare lo stato della lampadina 2019; si assegnino **2 punti** sommabili ai precedenti tre a chi mostri che è possibile cambiare lo stato di qualunque lampadina fra 1 e 2018.

- **5 punti** per la dimostrazione che la sequenza di mosse esibita si conclude con le lampadine da 1 a 2019 tutte accese: nel caso di una dimostrazione simile a quella proposta, si tratta dell'osservazione che, per via dell'ordine in cui le mosse vengono effettuate, l'ultima mossa effettuata su una lampadina compresa fra la 1 e la 2019 la rende accesa (e che nessuna lampadina è lasciata spenta).

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- **1 punto** per chi osservi che il triangolo BDE è isoscele su base BE.

- **2 punti** per chi osservi che i segmenti DO e OE sono congruenti.

- **5 punti** per chi dimostri che gli angoli $\widehat{ODA}$ e $\widehat{OEF}$ sono congruenti. Per chi non arrivi a ottenere questi punti, si assegnino **2 punti** se almeno uno fra gli angoli $\widehat{OEB}$, $\widehat{CEF}$, $\widehat{ODA}$ viene calcolato in termini di $\widehat{BAC}$ o $\widehat{BDC}$.

- **3 punti** per chi dalle conclusioni precedenti derivi il fatto che i triangoli ODA e OEF sono congruenti.

- **4 punti** per chi concluda correttamente la dimostrazione, ad esempio osservando che $\widehat{DAO}$ è congruente a $\widehat{DFO}$ e che A ed F si trovano dalla stessa parte rispetto alla retta DO. Per chi ometta quest'ultima osservazione (o equivalenti) ma usi un argomento che la richiede, si assegnino soltanto **3 punti** sui quattro possibili.

Esercizio 17

- Il punto (a) vale **4 punti**. Di questi, si assegnino **2 punti** a chi osservi che, dato un numero corretto, permutando i suoi blocchi di due cifre si ottiene ancora un numero corretto.

- Il punto (b) vale **5 punti**. Di questi, si assegnino **3 punti** a chi osservi che ciascuna cifra in posizione dispari può comparire al più 9 volte.

- Il punto (c) vale **6 punti**. A chi desse un esempio di numero corretto con 162 cifre, senza mostrare però il limite superiore al numero delle cifre, si diano **2 punti**. A chi dimostrasse che un numero corretto non può avere più di 162 cifre, senza però mostrare un esempio che realizza il massimo, si diano **4 punti**.