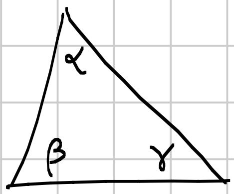
G - TRIGONOMETRIA 3

Titolo nota 23/02/2019

Applicazioni alla geometria

Oss 1:



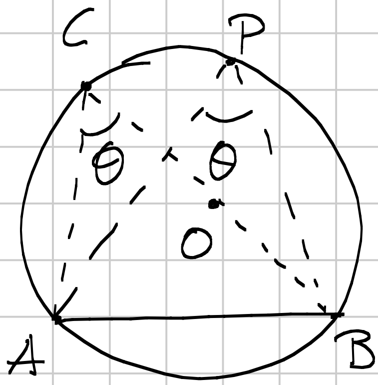
$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

→ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ possono essere qualunque numero tra -1 e 1

→ $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ sono compresi tra 0 e 1.

Sapendo $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ posso ricavare $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ univocamente da $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ e quindi posso determinare α, β, γ.



Fatto 1: per ogni punto P sull'arco maggiore $\widehat{AB}$

$A\hat{P}B = \theta$ è costante e acuto o retto.

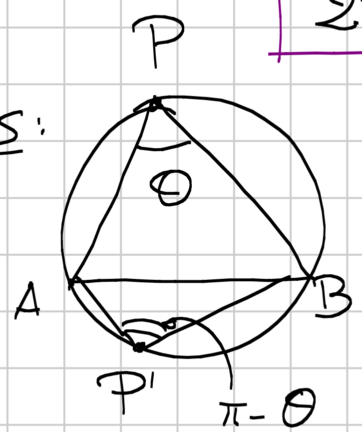
$\Rightarrow$ se scelgo C diametralmente opposto a B

$A\hat{C}B = \theta$, $C\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$ (perché CB è diametro)

$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \sin\theta$ ovvero, se R è il raggio della circonferenza

$$\boxed{2R \cdot \sin\theta = AB}$$ teo della CORDA

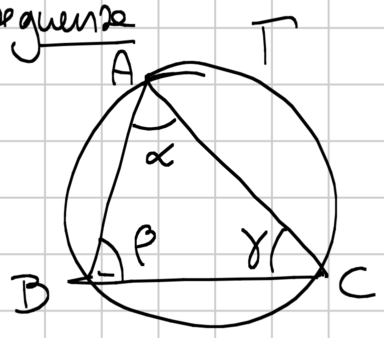
Oss:



$A\hat{P}B = \theta \rightarrow A\hat{P'}B = \pi - \theta$

$\Rightarrow \sin(A\hat{P'}B) = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

Conseguenze



R = raggio di T

BC = a, AC = b, AB = c

$$\Rightarrow \quad a = 2R\sin\alpha \qquad b = 2R\sin\beta \qquad c = 2R\sin\gamma$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \; [= 2R] \quad \text{Teorema DEI SENI}}$$

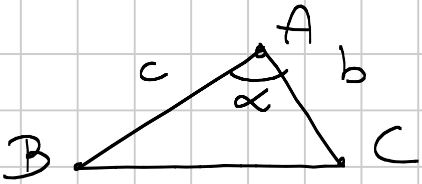
- Se in un triangolo conosco gli angoli α, β, γ e un lato, ad es. a posso calcolare gli altri lati

$$b = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta \qquad c = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma$$

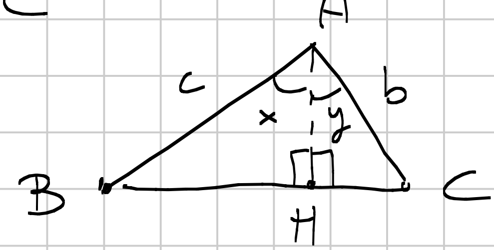
- Se in un triangolo conosco i lati e un angolo, ad es. α, posso ricavare i seni degli altri angoli

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha \qquad \sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha$$

Teorema di CARNOT (o del COSENO)



Posso trovare a in funzione di c, b, α?



$x + y = \alpha$

$c \cdot \sin x = BH$

$b \cdot \sin y = CH$

$$\boxed{\begin{array}{l} c \cdot \cos x = AH \\ b \cdot \cos y = AH \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$c^2\cos^2 x = b^2\cos^2 y = cb \cdot \cos x \cdot \cos y$$

$$a = BH + CH = c\cdot\sin x + b\cdot\sin y$$

$$a^2 = c^2\sin^2 x + b^2\sin^2 y + 2cb\sin x\sin y =$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= c^2 + b^2 - c^2\cos^2 x - b^2\cos^2 y + 2cb\sin x\sin y =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\,(\cos x\cos y - \sin x\sin y) =$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}$

Oss 1: $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

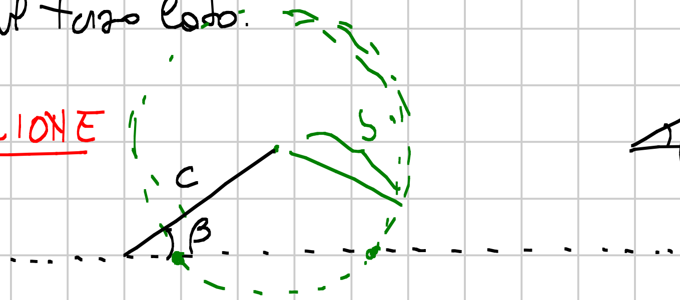
Oss 2: $\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow$ PITAGORA

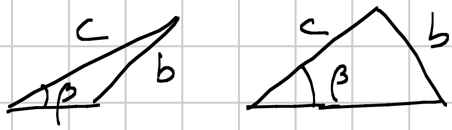
$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha>0 \Rightarrow a^2<b^2+c^2$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \Rightarrow \cos\alpha<0 \Rightarrow a^2>b^2+c^2$

- Se conosciamo i tre lati, possiamo calcolare coseno (e seno) dei tre angoli
- Se conosciamo due lati e l'angolo compreso, possiamo calcolare il terzo lato.

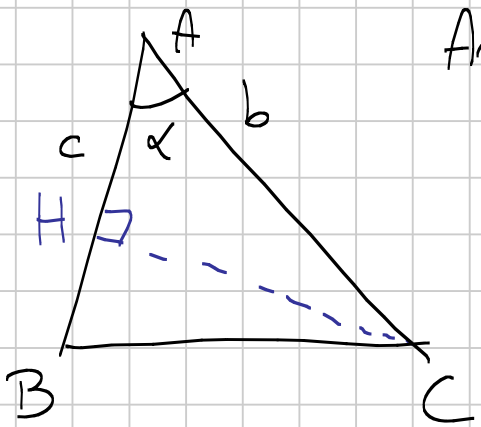
ATTENZIONE





Es: trovare i due valori possibili di a in funzione di b, c, β.

Area del triangolo



$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, CH\cdot AB = \frac{1}{2}\, b\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot c = \frac{1}{2}\, bc\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\, ac\sin\beta$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\, 4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\frac{1}{2}\,ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\,\frac{abc}{2R} \qquad \frac{1}{2}\,4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\boxed{\text{Area} = \frac{abc}{4R} \qquad R = \frac{abc}{4\cdot\text{Area}}}$$