XXXV Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 3 maggio 2019

1. Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e tale che $AB = BC$, $CD = DE$ ed $EF = AF$. Dimostrare che i segmenti AD, BE e CF concorrono (cioè hanno un punto in comune).

2. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ è un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto per nessun intero positivo n.

3. Sia n un intero maggiore di 2. Si vogliono colorare di rosso esattamente $n+1$ dei numeri $1, 2, \cdots, 2n-1, 2n$ in modo tale che non ci siano tre numeri distinti x, y, z colorati di rosso che soddisfano l'uguaglianza $x + y = z$.

Dimostrare che esiste uno e un solo modo di scegliere i numeri da colorare di rosso che rispetti la condizione data.

4. Denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ il più grande intero $\leq$ di x.

Siano $\lambda \geq 1$ un numero reale, e n un intero positivo, tali che $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{n+2} \rfloor$, $\ldots$, $\lfloor \lambda^{4n} \rfloor$ sono tutti quadrati perfetti. Dimostrare che $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto.

5. Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano D il piede della bisettrice interna da A ed M il punto medio di AD. Sia inoltre X un punto sul segmento BM tale che $\angle MXA = \angle DAC$.

Dimostrare che AX è perpendicolare a XC.

6. Alberto e Barbara sono seduti, l'uno accanto all'altra, davanti a un tavolo su cui hanno disposto in fila, da sinistra verso destra, 15 cioccolatini. Alcuni dei cioccolatini sono al latte, gli altri al cioccolato fondente. A turno, iniziando da Alberto, giocano al seguente gioco: durante il proprio turno, ciascuno dei due deve mangiare un numero strettamente positivo di cioccolatini consecutivi, cominciando sempre da quello più a sinistra fra quelli rimasti e facendo in modo che il numero di cioccolatini mangiati dello stesso tipo del primo sia dispari (ad esempio, se in un certo turno la sequenza di cioccolatini rimasti è LLFLF, dove L sta per *al latte* e F per *fondente*, il giocatore di turno può mangiare il primo cioccolatino da sinistra, i primi 4 da sinistra, o tutti e 5 i cioccolatini).

Vince chi mangia l'ultimo cioccolatino.

Tra le 2^{15} possibili sequenze iniziali di gusti dei cioccolatini, quante sono quelle per cui Barbara ha una strategia vincente?

XXXV Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 3 maggio 2019

Soluzioni

1. Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e tale che $AB = BC$, $CD = DE$ ed $EF = AF$. Dimostrare che i segmenti AD, BE e CF concorrono (cioè hanno un punto in comune).

Soluzione: Poiché $AB = BC$, usando il fatto che in una circonferenza a corde congruenti corrispondono angoli alla circonferenza congruenti, si ha $\angle AEB = \angle BEC$. Analogamente $\angle CAD = \angle DAE$ e $\angle ACF = \angle FCE$.

Dunque AD, EB e CF sono le tre bisettrici del triangolo ACE e pertanto concorrono nel suo incentro.

2. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ è un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto per nessun intero positivo n.

Soluzione: Scriviamo $p+q^2 = a^2$ con a intero positivo. Allora $p = a^2 - q^2 = (a-q)(a+q)$, e siccome p è un numero primo i fattori $a - q$ e $a + q$ devono essere uguali a ± 1 o a $\pm p$. Siccome $a + q$ è un numero positivo, anche $a - q$ deve esserlo, ed inoltre $a + q > a - q$, quindi l'unica possibilità è $a + q = p$, $a - q = 1$. Ne segue che $a = q + 1$ e $p = a^2 - q^2 = 2q + 1$.

Supponiamo ora per assurdo che $p^2 + q^n$ sia un quadrato, $p^2 + q^n = b^2$ con b intero positivo. Si ha $q^n = b^2 - p^2 = (b - p)(b + p)$, e quindi, siccome gli unici divisori di q^n sono della forma $\pm q^i$ con $0 \le i \le n$, si deve avere $b - p = q^i$, $b + p = q^j$ (come prima è facile vedere che entrambi i fattori sono positivi) e $q^i \cdot q^j = q^n$, ovvero $i + j = n$; inoltre, siccome $b - p < b + p$, si ha $q^i < q^j$. Sottraendo membro a membro le uguaglianze $b + p = q^j, b - p = q^i$ si ottiene $2p = q^j - q^i = q^i(q^{j-i} - 1)$. Distinguiamo ora i casi $i = 0$ e $i > 0$. Se $i = 0$ si ha $b - p = 1$ e $b + p = q^n$: allora $q^n = b + p = 2p + 1 = 4q + 3$, quindi $3 = q^n - 4q = q(q^{n-1} - 4)$. Ne segue che q divide 3, quindi $q = 3$, e semplificando un fattore 3 si arriva all'equazione $3^{n-1} - 4 = 1 \Rightarrow 3^{n-1} = 5$, che non ha soluzioni intere. Se invece $i > 0$, dall'equazione $2p = q^i(q^{j-i} - 1)$ si ottiene $q \mid 2p = 2(2q + 1) \Rightarrow q \mid 2$, ovvero $q = 2$, $p = 2q + 1 = 5$, e $2p = q^i(q^{j-1} - 1) \Rightarrow 10 = 2^i(2^{j-i} - 1)$. Ne segue che i è uguale ad 1 (perché 2^i divide 10) e che $5 = 2^{j-1} - 1$, ma nuovamente questa equazione non ha soluzioni intere.

3. Sia n un intero maggiore di 2. Si vogliono colorare di rosso esattamente $n+1$ dei numeri $1, 2, \cdots, 2n-1, 2n$ in modo tale che non ci siano tre numeri distinti x, y, z colorati di rosso che soddisfano l'uguaglianza $x + y = z$.

Dimostrare che esiste uno e un solo modo di scegliere i numeri da colorare di rosso che rispetti la condizione data.

Soluzione: Sia A l'insieme dei numeri da colorare di rosso, Se $A = \{n, n + 1, \dots 2n\}$ non ce ne sono tre per i quali $x + y = z$, in quanto per ogni $x, y \in A$ con $x \neq y$ si ha $x + y > 2n$.

Rimane dunque da dimostrare che questa è l'unica scelta possibile per l'insieme A,

Dimostriamo l'enunciato per induzione su n, cominciando con il caso $n = 3$. Se, per assurdo, avessimo $1 \in A$ allora A non potrebbe avere due numeri consecutivi maggiori di 1, per cui necessariamente $A = \{1, 2, 4, 6\}$. Ma, siccome $2 + 4 = 6$, questo dà una contraddizione. Se invece $1 \notin A$ ma $2 \in A$, allora A dovrebbe contenere almeno una delle due coppie $\{3, 5\}$ o $\{4, 6\}$, dando di nuovo una contraddizione con l'ipotesi che non si può avere $x + y = z$ con $x, y, z \in A$.

Supponiamo ora di aver dimostrato l'unicità per il numero n e dimostriamola per $n + 1$.

Innanzitutto osserviamo che A deve contenere almeno uno dei numeri $2n + 1, 2n + 2$, poiché altrimenti A dovrebbe contenere $n + 2$ numeri compresi fra 1 e $2n$, che è escluso dall'ipotesi induttiva (solo $n + 1$ numeri fra 1 e $2n$ possono appartenere ad A). Dimostriamo inoltre che A deve contenere entrambi i numeri $2n + 1$ e $2n+2$: se così non fosse, A dovrebbe contenere almeno $n+1$ fra i numeri $\{1, \dots, 2n\}$ e, per ipotesi induttiva, dovrebbe contenere $\{n, n + 1 \dots, 2n\}$. Ma questo vorrebbe dire che A non contiene né $n + (n + 1) = 2n + 1$ né $n + (n + 2) = 2n + 2$, assurdo.

A questo punto, visto che $2n+1 \in A$, A può contenere solo uno dei numeri fra le coppie $\{1, 2n\}$, $\{2, 2n-1\}$, $\dots$, $\{n, n+1\}$. Si vede immediatamente che $1 \notin A$ poiché $1+(2n+1) = 2n+2$, e quindi $2n \in A$. Similmente, $2 \notin A$, visto che $2+2n \in A$ e quindi $2n-1 \in A$. Induttivamente, per ogni (a, b) con $a+b = 2n+1$ deve necessariamente apppartenere ad A il più grande fra gli elementi della coppia, e quindi $A = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n + 2\}$.

4. Denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ il più grande intero $\leq$ di x.

Siano $\lambda \geq 1$ un numero reale, e n un intero positivo, tali che $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{n+2} \rfloor$, ..., $\lfloor \lambda^{4n} \rfloor$ sono tutti quadrati perfetti. Dimostrare che $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto.

Soluzione: Dimostriamo, intanto, il caso $n = 1$. Sapendo che $\lfloor \lambda^2 \rfloor$, $\lfloor \lambda^3 \rfloor$, e $\lfloor \lambda^4 \rfloor$ sono quadrati perfetti, vogliamo vedere che $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto. Detto $a^2 = \lfloor \lambda^2 \rfloor$, abbiamo le disuguaglianze:

$$a^2 \leq \lambda^2 < a^2 + 1$$

per cui, in particolare, $\lambda^2 < (a+1)^2$, quindi $a \leq \lambda < a+1$ e $\lfloor \lambda \rfloor = a$. Elevando al quadrato la catena di disuguaglianze precedente, otteniamo

$$a^4 \leq \lambda^4 < (a^2+1)^2$$

e, siccome a^4 e $(a^2+1)^2$ sono quadrati perfetti consecutivi, $\lfloor \lambda^4 \rfloor = a^4$. Di conseguenza $\lambda^4 - a^4 < 1$. Ora, sfruttando l'ipotesi $\lambda \geq 1$,

$$\lambda^3 - a^3 = (\lambda - a)(\lambda^2 + \lambda a + a^2) \leq (\lambda - a)(\lambda(\lambda^2 + \lambda a + a^2) + a^3) = \lambda^4 - a^4$$

per cui abbiamo anche

$$a^3 \leq \lambda^3 = a^3 + \lambda^3 - a^3 \leq a^3 + \lambda^4 - a^4 < a^3 + 1$$

che implica $\lfloor \lambda^3 \rfloor = a^3$. Per ipotesi, sappiamo, quindi, che a^3 è un quadrato perfetto, allora anche $a = \lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto, come volevasi dimostrare.

Dimostriamo, ora, il caso generale, per induzione su n. La base dell'induzione, $n = 1$, è stabilita. Per il passo induttivo, supponiamo di sapere che, se $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{n+2} \rfloor$, ..., $\lfloor \lambda^{4n} \rfloor$ sono tutti quadrati perfetti, allora $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto. Dal fatto che $\lfloor \lambda^{(n+1)+1} \rfloor$, $\lfloor \lambda^{(n+1)+2} \rfloor$, ..., $\lfloor \lambda^{4(n+1)} \rfloor$ sono tutti quadrati perfetti, vogliamo dedurre che $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto. Se sapessimo anche che $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$ è un quadrato perfetto, allora potremmo applicare l'ipotesi induttiva e concludere immediatamente. Ora, detto $\bar{\lambda} = \lambda^{n+1}$, in particolare, $\lfloor \bar{\lambda}^2 \rfloor$, $\lfloor \bar{\lambda}^3 \rfloor$, e $\lfloor \bar{\lambda}^4 \rfloor$ sono tre dei nostri quadrati perfetti. Dal caso $n = 1$ applicato a $\bar{\lambda}$ segue, quindi, che $\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor$ è un quadrato perfetto, e questo conclude la dimostrazione.

5. Sia ABC un triangolo acutangolo. Siano D il piede della bisettrice interna da A ed M il punto medio di AD. Sia inoltre X un punto sul segmento BM tale che $\angle MXA = \angle DAC$.

Dimostrare che AX è perpendicolare a XC.

Soluzione: Dato che per ipotesi vale $\angle MXA = \angle DAC = \angle MAB$, i due triangoli MXA e MAB sono simili. Dunque

$$\frac{XM}{AM} = \frac{AM}{BM}.$$

Sia H il piede della perpendicolare condotta da A su BC. D'ora in poi assumiamo che H sia fra B e D. L'altro caso, ovvero D fra B e H, si tratta analogamente. Dal momento che M è punto medio dell'ipotenusa nel triangolo rettangolo AHD, si ha $AM = HM$. Dunque l'uguaglianza di rapporti precedente diviene

$$\frac{XM}{HM} = \frac{HM}{BM},$$

da cui si deduce la similitudine dei due triangoli XMH e HMB. Da questa similitudine deriva l'uguaglianza $\angle HXM = \angle BHM$, ma $\angle BHM = 180° - \angle MHD = 180° - \angle MDH = \beta + \frac{\alpha}{2}$, dove nella seconda uguaglianza usiamo che il triangolo MHD è isoscele, poiché AHD è rettangolo e M è punto medio dell'ipotenusa, e nella terza usiamo che la somma degli angoli del triangolo ABD è $180°$ adoperando la notazione standard dei triangoli.

Dunque $\angle AXH = \angle MXH + \angle AXM = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = \beta + \alpha$ visto che $\angle AXM = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$ per ipotesi. Dunque $\angle AXH + \angle ACH = \beta + \alpha + \gamma = 180°$ e quindi $AXHC$ è ciclico e da ciò si deduce $\angle AXC = \angle AHC = 90°$ che è ciò che volevamo.

Seconda soluzione: Sia A' l'intersezione, diversa da A, della circonferenza circoscritta ad AMX con il segmento AB. Si ha

$$\angle AA'M = \angle AXM = \angle DAC = \angle MAA',$$

dove la prima uguaglianza è vera poiché $AA'XM$ è ciclico, la seconda è vera per ipotesi e la terza poiché AD è bisettrice. Dunqua il triangolo $AA'M$ è isoscele. Sia M' il punto medio di AA'. Poiché $AA'M$ è isoscele, $MM' \perp AB$. Per il teorema di Talete, inoltre, $MM' \parallel DA'$ e dunque $DA' \perp AB$.

Sia H il piede dell'altezza condotta da A su BC. D'ora in poi assumiamo che H sia fra B e D. L'altro caso, ovvero D fra B e H, si tratta analogamente. Poiché $DA' \perp AB$ si ha $\angle DA'A = \angle DHA = 90°$ e dunque il quadrilatero $AA'HD$ è ciclico.

Mostriamo che anche $A'BHX$ è ciclico. Infatti $\angle BXA' = 180° - \angle A'XM = \angle A'AD$, dove l'ultima uguaglianza è vera poiché $AA'XM$ è ciclico; $\angle BHA' = 90° - \angle A'HA = 90° - \angle A'DA = \angle A'AD$, dove la seconda uguaglianza è vera poiché $AA'HD$ è ciclico e la terza poiché il triangolo $AA'D$ è rettangolo. Dunque $A'BHX$ ciclico poiché abbiamo mostrato

$$\angle BXA' = \angle A'AD = \angle BHA'.$$

Mostriamo infine che $MXHD$ è un quadrilatero ciclico. Infatti

$$\angle XMD = 180° - \angle XMA = \angle AA'X = 180° - \angle XA'B = \angle XHB,$$

dove la seconda uguaglianza è vera poiché $AA'XM$ è ciclico e la quarta poiché $A'BHX$ è ciclico.

Dalla ciclicità di $MXHD$ si deduce $\angle MXH = 180° - \angle MDH$. Nel triangolo ABD si ha $\angle MDH = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}$ usando la notazione standard dei triangoli. Dunque $\angle MXH = \beta + \frac{\alpha}{2}$ e $\angle AXH = \angle MXH + \angle AXM = \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} = \beta + \alpha$ visto che $\angle AXM = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$ per ipotesi. Dunque $\angle AXH + \angle ACH = \beta + \alpha + \gamma = 180°$ e quindi $AXHC$ è ciclico e da ciò si deduce $\angle AXC = \angle AHC = 90°$ che è ciò che volevamo.

6. Alberto e Barbara sono seduti, l'uno accanto all'altra, davanti a un tavolo su cui hanno disposto in fila, da sinistra verso destra, 15 cioccolatini. Alcuni dei cioccolatini sono al latte, gli altri al cioccolato fondente. A turno, iniziando da Alberto, giocano al seguente gioco: durante il proprio turno, ciascuno dei due deve mangiare un numero strettamente positivo di cioccolatini consecutivi, cominciando sempre da quello più a sinistra fra quelli rimasti e facendo in modo che il numero di cioccolatini mangiati dello stesso tipo del primo sia dispari (ad esempio, se in un certo turno la sequenza di cioccolatini rimasti è LLFLF, dove L sta per *al latte* e F per *fondente*, il giocatore di turno può mangiare il primo cioccolatino da sinistra, i primi 4 da sinistra, o tutti e 5 i cioccolatini).

Vince chi mangia l'ultimo cioccolatino.

Tra le 2^{15} possibili sequenze iniziali di gusti dei cioccolatini, quante sono quelle per cui Barbara ha una strategia vincente?

Soluzione: Supponiamo che, più in generale, un giocatore si trovi a dover effettuare una mossa con una fila di n cioccolatini numerati da 1 a n; denoteremo con *effettuare la mossa* k, per il giocatore di turno, l'atto di mangiare i cioccolatini $\{1, \ldots, k\}$. Diremo che la mossa k è *legale* se $1 \leq k \leq n$ e se fra i cioccolatini $\{1, \ldots, k\}$ ve n'è un numero dispari del gusto di 1. Diremo che una sequenza di n gusti è *vincente* se il giocatore di turno, messo davanti a cioccolatini con i gusti in tale sequenza, possiede una strategia vincente; la sequenza verrà detta *perdente* in caso contrario. Il problema chiede di determinare il numero di sequenze perdenti di lunghezza 15.

Incominciamo con due semplici osservazioni:

Osservazione 1. Se una sequenza contiene un numero dispari di occorrenze del gusto 1, allora è vincente (la mossa L, dove L è la lunghezza della sequenza, è legale e vincente per il giocatore di turno).

Osservazione 2. Sia data una sequenza di lunghezza $2n + 1$ con un numero pari di occorrenze del gusto 1. Se questa è vincente, allora qualunque strategia vincente per il giocatore di turno deve cominciare con una mossa della forma $2k$, dove $0 < k \leq n$ è tale che il gusto $2k+1$ sia diverso dal gusto 1. In effetti, se il giocatore di turno effettuasse una mossa (legale) della forma $2h + 1$, lascerebbe un numero dispari di cioccolatini di ciascun gusto, e dunque il giocatore successivo vincerebbe mangiando tutti i cioccolatini rimanenti. D'altra parte, poiché il numero di cioccolatini del gusto 1 avanzati dal giocatore di turno è in ogni caso dispari, è necessario perché la sequenza lasciata al giocatore successivo sia perdente che il gusto $2k + 1$ sia diverso dal gusto 1.

Troveremo conveniente considerare per ciascuna sequenza di gusti di lunghezza n una sequenza corrispondente di zeri e uni $x_1 x_2 \ldots x_n$, così costruita: $x_i = 0$ se il numero di cioccolatini in $\{1, \ldots, i\}$ dello stesso gusto di 1 è pari, $x_i = 1$ altrimenti. Si noti che $x_1 = 1$ e che a ciascuna sequenza $x_1x_2 \dots x_n \in \{1\} \times \{0,1\}^{n-1}$ corrispondono esattamente due sequenze di gusti, entrambe vincenti o entrambe perdenti (dunque parleremo di sequenze di zeri e uni a loro volta vincenti o perdenti).

Le sequenze che finiscono per 1 sono tutte vincenti. Supponiamo che una sequenza di lunghezza dispari finisca per 0 e suddividiamola in blocchi come segue:

$$1\boxed{x_2x_3}\boxed{x_4x_5}\dots\boxed{x_{2n-2}x_{2n-1}}\boxed{x_{2n}0}.$$

Per l'osservazione 2, se questa è vincente il giocatore di turno deve effettuare una mossa di tipo $2k$, dove il k-esimo blocco riquadrato è del tipo $\boxed{11}$ (si deve avere $x_{2k} = 1$ affinché la mossa sia legale e $x_{2k+1} = x_{2k}$ perché il gusto di $2k + 1$ sia diverso da quello di 1). Tale mossa lascia al giocatore successivo una sequenza del tipo

$$1\boxed{y_2y_3}\boxed{y_4y_5}\dots\boxed{y_{2n-2k}0}$$

in cui, poiché è stato mangiato un numero dispari di cioccolatini di ciascun gusto, $y_i = x_{i+2k}$ per i dispari e $y_i \neq x_i$ per i pari. In altre parole, la sequenza y_i è ottenuta dalla sequenza x_i cancellando i primi k blocchi riquadrati e, nei blocchi successivi, scambiando $\boxed{00}$, $\boxed{01}$, $\boxed{10}$,$\boxed{11}$ con $\boxed{10}$, $\boxed{11}$, $\boxed{00}$,$\boxed{01}$ rispettivamente.

Fra le sequenze di lunghezza dispari che finiscono per 0 distinguiamo tre casi:

(i) non vi sono blocchi $\boxed{11}$; allora la sequenza è perdente per l'Osservazione 2;

(ii) l'ultimo blocco $\boxed{11}$, diciamo il k-esimo, non ha blocchi $\boxed{01}$ alla sua destra; allora la sequenza è vincente: la mossa k è legale e lascia all'avversario una sequenza del tipo (i) (che finisce anch'essa per 0 e ha lunghezza dispari);

(iii) l'ultimo blocco $\boxed{11}$ ha un blocco $\boxed{01}$ alla sua destra; allora la sequenza è perdente, perché qualunque scelta di un blocco $\boxed{11}$ lascia all'avversario una sequenza di tipo (ii), che è vincente.

Riassumendo, dobbiamo contare le sequenze di tipo (i) e (iii) di lunghezza 15. Si tratta di scegliere il contenuto di 7 blocchi fra le possibilità $\{\boxed{00},\boxed{01},\boxed{10},\boxed{11}\}$ rispettando le condizioni date. Vi sono sempre due possibilità per l'ultimo blocco, che è del tipo $\boxed{10}$ o $\boxed{00}$. Le sequenze in cui non compare né $\boxed{11}$ né $\boxed{01}$, che sono perdenti, sono 2^7. Fra le sequenze in cui compare almeno un blocco $\boxed{11}$ o $\boxed{01}$ e tali che l'ultimo blocco sia $\boxed{10}$ o $\boxed{00}$, quelle di tipo (i) o (iii) sono esattamente la metà: questo perché una sequenza è del tipo (i) o (iii) se e solo se la sequenza ottenuta cambiando i blocchi $\boxed{11}$ in $\boxed{01}$ e viceversa non lo è. Dobbiamo dunque aggiungere $\frac{2\times 4^6 - 2^7}{2} = 2^{12} - 2^6$ sequenze perdenti.

Ricordando che a ciascuna sequenza perdente di zeri e uni corrispondono due sequenze perdenti originali, abbiamo dunque un totale di $2(2^7 + 2^{12} - 2^6) = 2(2^6 + 2^6 + 2^{12} - 2^6) = 2^7 + 2^{13}$ sequenze perdenti.

Seconda soluzione:

Visto che il problema riguarda una sequenza di 15 cioccolatini, e che 15 è un numero dispari, possiamo supporre che la sequenza sia costituita da $n = 2k + 1$ cioccolatini.

Osserviamo che se il tipo di cioccolatino che compare per primo a a sinistra compare in totale un numero dispari di volte, allora Alberto voince mangiando tutti i cioccolatini alla prima mossa.

Supponiamo dunque che il cioccolatino più a sinistra compaia un numero pari di volte, che corrisponde a 2^{2k} casi, e supponiamo che tra essi a_k sia il numero di volte in cui Alberto ha una strategia vincente e b_k sia il numero di volte in cui Barbara ha una strategia vincente.

Con una verifica immediata si trova $b_0 = 0$ e $b_1 = 4$. Supponiamo ora $k \geq 2$ e quindi $n = 2k + 1 \geq 5$. Consideriamo dapprima il caso in cui la sequenza di cioccolatini termini con due cioccolatini dello stesso tipo, ossia LL oppure FF, quindi complessivamente in un numero di casi uguale a 2^{n-2}. In questo caso è chiaro che colui che riesce af effettuare l'ultima mossa per mangiare i primi $n - 2$ ciccolatini può anche mangiare anche gli altri due, e quindi ci sono $2b_{k-1}$ casi in cui Barbara vince,.

Supponiamo ora che gli ultimi due cioccolatini siano di tipo diverso, per esempio LF, e consideriamo il tipo del primo e del terzultimo dei cioccolatini. Nel caso in cui questi tipi siano diverso, LF o FL, Alberto vince se fa la mossa (lecita) di mangiare tutti i cioccolatini salvo gli ultimi 3. Se invece il primo e il terzultimo dei cioccolatini sono dello stesso tipo, per esempio LL, Alberto, che non può mangiare tutti i ciocciolatini, deve lasciare a Barbara una sequenza non vuota di cioccolatini. Se la sequenza rimasta comincia con L, Barbara può mangiare tutti i rimanenti, e quindi vince. Se la sequenza rimasta comincia con F, allora o il numero di F rimasto è dispari, e quindi Barbara vince mangiando tutti i cioccolatini rimanenti, oppore il numero di F rimasto è pari, e allora Barbara vince lasciando ad Alberto gli ultimi 3 cioccolatini. Il caso in cui il primo e il terzultimo cioccolatino siano del tipo FF è analogo.

In conclusione, Barbara vince in tutti i casi in cui il primo e il terzultimo ciccolatino siano dello stesso tipo e gli ultimi due di tipo diverso. Poiché stiamo considerando solo il caso in cui il numero di cioccolatini dello stesso tipo del primo è pari, questo dà luogo a $2^{n-3} = 2^{2k-2}$ possibilità.

Questo fornisce la formula ricorsiva

$$b_k = 2b_{k-1} + 2^{2k-2}$$

e quindi permette di calcolare in pochi passaggi $b_7 = 8320$, che è il numero cercato.

Nota: Con tecniche classiche la formula ricorsiva permette di ricavare una formula chiusa, che in questo caso è $b_k = 2^k + \frac{1}{2}4^k$.