Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
MIUR

6 Febbraio 2020

Gara Nazionale Classi Prime 2020

Problemi

In questa lista di problemi la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle 36 versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*

In questa lista i problemi non sono necessariamente in ordine di difficoltà, ma comunque abbiamo marcato quelli che secondo noi erano i più semplici col simbolo $\mathcal{F}$.

Per la Commissione Olimpiadi: Emanuele Callegari.

1. $\mathcal{F}$ Quanto vale il minimo comune multiplo dei tre numeri $a = 6^9 \cdot 10^3 \cdot 15^3$, $b = 6^3 \cdot 10^9 \cdot 15^3$, e $c = 6^3 \cdot 10^3 \cdot 15^9$?

$\boxed{A}$ $6^6 \cdot 10^6 \cdot 15^6$ $\boxed{B}$ $6^9 \cdot 10^9 \cdot 15^9$ $\boxed{C}$ $6^8 \cdot 10^8 \cdot 15^8$ $\boxed{D}$ $6^7 \cdot 10^7 \cdot 15^7$ $\boxed{E}$ $6^5 \cdot 10^5 \cdot 15^5$ $\boxed{F}$ $6^4 \cdot 10^4 \cdot 15^4$

2. $\mathcal{F}$ Ci sono 11 monete identiche (con **Testa** su una faccia e **Croce** sull'altra) sparse su un tavolo con il lato **Testa** rivolto verso l'alto. Stabiliamo che fare una mossa significa scegliere 3 monete distinte e invertirle, cioè ruotarle in modo che appoggino sul tavolo con la faccia che prima era rivolta verso l'alto. Quante mosse servono al minimo perché tutte le monete abbiano la **Croce** rivolta verso l'alto?

$\boxed{A}$ 5 $\boxed{B}$ 4 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ 7 $\boxed{E}$ 11 $\boxed{F}$ è impossibile

3. $\mathcal{F}$ Qual è il più piccolo intero positivo il cui quadrato è divisibile per 504?

$\boxed{A}$ 84 $\boxed{B}$ 504 $\boxed{C}$ 42 $\boxed{D}$ 126 $\boxed{E}$ 252 $\boxed{F}$ nessuna delle altre risposte è esatta

4. $\mathcal{F}$ Un dodecaedro regolare è un solido avente 12 facce, tutte uguali tra loro, a forma di pentagono regolare. Quanti sono i suoi vertici?

$\boxed{A}$ 20 $\boxed{B}$ 60 $\boxed{C}$ 30 $\boxed{D}$ 12 $\boxed{E}$ 36 $\boxed{F}$ 48

5. $\mathcal{F}$ Nell'intervallo di tempo di 12 ore che va dalle 10:00:05 alle 22:00:05 quante volte capita che in un orologio la lancetta dei secondi e quella dei minuti puntino nella stessa direzione?

$\boxed{A}$ 708 $\boxed{B}$ 720 $\boxed{C}$ 719 $\boxed{D}$ 660 $\boxed{E}$ 600 $\boxed{F}$ 590

6. $\mathcal{F}$ L'espressione $\dfrac{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} + 1 + 5 + 5^2}{\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5} + 2 + 2 \cdot 5 + 5^2 + 5^3}$ vale:

$\boxed{A}$ $\frac{5}{26}$ $\boxed{B}$ $\frac{5}{24}$ $\boxed{C}$ $\frac{25}{126}$ $\boxed{D}$ $\frac{25}{124}$ $\boxed{E}$ $\frac{25}{121}$ $\boxed{F}$ $\frac{25}{129}$

7. $\mathcal{F}$ Della lista di 2020 numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2020}$ sappiamo che i primi due sono $a_1 = 5$ e $a_2 = 7$. Sappiamo inoltre che, dal terzo in poi, ogni termine si ottiene facendo il quoziente tra quello che lo precede di una posizione e quello che lo precede di due posizioni, ovvero: $a_3 = a_2/a_1$, $a_4 = a_3/a_2$, $a_5 = a_4/a_3$, ecc. Quanto vale a_{2020}?

$\boxed{A}$ $\frac{1}{5}$ $\boxed{B}$ $\frac{1}{7}$ $\boxed{C}$ $\frac{7}{5}$ $\boxed{D}$ $\frac{5}{7}$ $\boxed{E}$ 5 $\boxed{F}$ 7

8. $\mathcal{F}$ In un cesto ci sono 40 calzini: 10 gialli, 10 rossi, 10 verdi e 10 blu. Ne prendo un certo numero, senza guardare, e spero con essi di poter mettere insieme almeno 4 paia in cui entrambi i calzini abbiano lo stesso colore. Qual è il minimo numero di calzini da prendere per essere sicuri di poterlo fare?

$\boxed{A}$ 11 $\boxed{B}$ 8 $\boxed{C}$ 12 $\boxed{D}$ 15 $\boxed{E}$ 10 $\boxed{F}$ nessuna delle altre risposte è esatta

9. Se scriviamo in ordine decrescente la lista di tutti i divisori positivi di 646400 si ottiene:

$$646400,\ 323200,\ 161600,\ \ldots,\ 5,\ 4,\ 2,\ 1$$

Qual è l'ottavo numero di tale lista?

$\boxed{A}$ 32320 $\boxed{B}$ 40400 $\boxed{C}$ 2525 $\boxed{D}$ 16160 $\boxed{E}$ 25856 $\boxed{F}$ 5050

10. Nell'isola *Kenoncè* è stato deciso il dimezzamento del numero di parlamentari. Le nuove elezioni tuttavia portano ad un parlamento che pur essendo la metà del precedente non è composto da persone nuove ma è un sottoinsieme del parlamento precedente. Tuttavia le proporzioni tra i due unici partiti politici dell'isola cambiano: solo $\frac{1}{8}$ dei parlamentari del **Partito della Lasagna** viene riconfermato nel suo incarico, mentre il **Partito della Pagnotta** vede riconfermati ben $\frac{3}{4}$ dei suoi parlamentari. Qual è, nel nuovo parlamento, la percentuale di seggi del Partito della Pagnotta?

$\boxed{A}$ 90% $\boxed{B}$ 75% $\boxed{C}$ 60% $\boxed{D}$ 50% $\boxed{E}$ 72% $\boxed{F}$ non determinabile dai soli dati forniti

11. Un foglio di cartone rettangolare viene ritagliato in modo da ottenere esattamente nove pezzi, tutti quadrati: uno di area $64\,\text{cm}^2$, due di area $16\,\text{cm}^2$ e sei di area $4\,\text{cm}^2$. Qual era il perimetro del rettangolo?

$\boxed{A}$ 44 cm $\boxed{B}$ 46 cm $\boxed{C}$ 52 cm $\boxed{D}$ 62 cm $\boxed{E}$ 68 cm $\boxed{F}$ non determinabile dai soli dati forniti

12. L'ottagono regolare $ABCDEFGH$ ha area 1440. Qual è l'area del trapezio $ABCD$?

$\boxed{A}$ 360 $\boxed{B}$ 480 $\boxed{C}$ 288 $\boxed{D}$ 432 $\boxed{E}$ 400 $\boxed{F}$ 384

13. Claudia e Luca giocano a **Dividi e Sostituisci**. All'inizio sulla lavagna è scritto un intero positivo n. A turno, i due giocatori dividono il numero scritto sulla lavagna per una potenza di un numero primo in modo da ottenere un nuovo intero positivo m, più piccolo di n, che viene scritto alla lavagna al posto di n. Vince il primo che riesce ad ottenere 1. Ad un certo punto sulla lavagna c'è scritto 320000 e tocca a Claudia. Che mossa deve fare Claudia per essere sicura di poter forzare la vittoria, comunque giochi Luca?

$\boxed{A}$ dividere per 32 $\boxed{B}$ dividere per 625 $\boxed{C}$ dividere per 2 $\boxed{D}$ dividere per 25 $\boxed{E}$ c'è più di una mossa che permette a Claudia di vincere $\boxed{F}$ qualunque mossa faccia Claudia, Luca riesce a vincere

14. Di un intero positivo n sappiamo che termina per 5 e che la cifra delle decine di n^3 è dispari. Qual è la cifra delle decine di n^3?

$\boxed{A}$ 7 $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ 3 $\boxed{D}$ 5 $\boxed{E}$ 9 $\boxed{F}$ non univocamente determinata dai dati forniti

15. Un quadrato $ABCD$ ha il lato di 120 centimetri e γ è il suo cerchio circoscritto. Trovare l'area (espressa in cm^2) della lunula che si ottiene togliendo a γ la sua intersezione con il cerchio di centro A e raggio AB.

$\boxed{A}$ 7200 $\boxed{B}$ 2000π $\boxed{C}$ 2400π $\boxed{D}$ 8000 $\boxed{E}$ 4800 $\boxed{F}$ 1440π

16. Sappiamo che m ed n sono due interi positivi aventi rispettivamente 11 e 12 divisori positivi. Sapendo inoltre che il $\text{MCD}(m, n)$ ha 4 divisori positivi, dire quanti sono i divisori positivi del prodotto mn. (Ricordare che tra i divisori di un numero vanno contati anche 1 e il numero stesso)

$\boxed{A}$ 42 $\boxed{B}$ 33 $\boxed{C}$ 36 $\boxed{D}$ 52 $\boxed{E}$ 143 $\boxed{F}$ i dati sono insufficienti per rispondere

17. Dato l'ottagono regolare $\mathcal{P}$ di area 1440, consideriamo il più grande quadrato contenuto in $\mathcal{P}$ e il più piccolo quadrato contenente $\mathcal{P}$. Qual è la differenza tra le aree dei due quadrati?

$\boxed{A}$ 720 $\boxed{B}$ 840 $\boxed{C}$ 576 $\boxed{D}$ 480 $\boxed{E}$ 600 $\boxed{F}$ 640

18. Qual è la somma dei reciproci di tutti i divisori positivi di 6300? (Si ricordi che tra i divisori vanno considerati anche 1 e 6300)

$\boxed{A}$ $\frac{806}{225}$ $\boxed{B}$ $\frac{784}{225}$ $\boxed{C}$ $\frac{902}{225}$ $\boxed{D}$ $\frac{1024}{225}$ $\boxed{E}$ $\frac{976}{225}$ $\boxed{F}$ $\frac{1102}{225}$

Soluzioni

Qui di seguito trovate le soluzioni in forma scritta. Alcune soluzioni in forma di video verranno successivamente pubblicate sul canale YouTube:

`problemisvolti.it`

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: $6^6 \cdot 10^6 \cdot 15^6$.

In particolare è sbagliata la risposta $6^9 \cdot 10^9 \cdot 15^9$, visto che 6, 10 e 15 non sono primi.
Invece abbiamo:

$$a = 6^9 \cdot 10^3 \cdot 15^3 = (2 \cdot 3)^9 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot (3 \cdot 5)^3 = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^6$$

e, analogamente:

$$b = 6^3 \cdot 10^9 \cdot 15^3 = \ldots = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^{12}$$

e:

$$c = 6^3 \cdot 10^3 \cdot 15^9 = \ldots = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}$$

Di conseguenza

$$\text{mcm}(a, b, c) = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 3)^6 \cdot (2 \cdot 5)^6 \cdot (3 \cdot 5)^6 = 6^6 \cdot 10^6 \cdot 15^6$$

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: 5.

Inizialmente sul tavolo tutte le 11 monete indicano **Testa**.
Le mosse che si possono fare sono di 4 tipi diversi che per comodità di esposizione indicheremo con $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^c$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^c$.
$\mathcal{A}$ è la mossa che inverte 3 monete con **Testa** facendole diventare 3 **Croci**.
$\mathcal{A}^c$ indica la mossa inversa di $\mathcal{A}$: 3 **Croci** diventano 3 **Teste**.
$\mathcal{B}$ invece trasforma 2 **Teste** e una **Croce** in 2 **Croci** e una **Testa**.
Infine $\mathcal{B}^c$ è la mossa inversa di $\mathcal{B}$.
Una possibile sequenza di 5 mosse che inverte tutte le monete è:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}^c\mathcal{A}.$$

Rimane da dimostrare che con meno di 5 mosse è impossibile.
A tale scopo osserviamo che ogni mossa fa variare il numero di **Croci** di una quantità dispari: 3 per $\mathcal{A}$, -3 per $\mathcal{A}^c$, 1 per $\mathcal{B}$ e -1 per $\mathcal{B}^c$.
Di conseguenza, se le mosse sono 4, la variazione del numero di **Croci** deve essere pari, perché somma di 4 numeri dispari, quindi il numero di **Croci** non può passare da 0 a 11.
Meno di 4 mosse però non bastano visto che ogni mossa fa aumentare le **Croci** al massimo di 3 unità.
Quindi il minimo numero di mosse che servono è 5.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: 84.

Se fattorizziamo 504 otteniamo:

$$504 = 4 \cdot 126 = 4 \cdot 9 \cdot 14 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Quindi il suo multiplo più piccolo che sia anche un quadrato perfetto è:

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = \left(2^2 \cdot 3 \cdot 7\right)^2 = (12 \cdot 7)^2 = 84^2.$$

Quindi il numero cercato è 84.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: 20.
Le 12 facce hanno ciascuna 5 vertici.
Tuttavia è sbagliato affermare che i vertici sono 12×5, cioè 60, perché ogni vertice è in comune a 3 facce e quindi lo stiamo contando 3 volte.
La risposta corretta quindi è un terzo di 60, cioè 20.
Il fatto che ogni vertice sia in comune a tre facce si deduce facilmente (anche senza visualizzare il solido) dal fatto che gli angoli interni di un pentagono regolare sono ottusi: se per assurdo un vertice fosse in comune a 4 o più facce la somma degli angoli che hanno in comune quel vertice sarebbe maggiore di un angolo giro, cosa che non può essere.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: 708.
Nell'intervallo di tempo di un'ora (ad esempio dalle 10:00:05 alle 11:00:05) la lancetta dei minuti fa un giro esatto mentre quella dei secondi ne fa 60.
Questo significa che, se non partono dalla stessa posizione, la lancetta dei secondi "sorpassa" 59 volte quella dei minuti.
Siccome l'intervallo assegnato è di 12 ore, i "sorpassi" sono 12×59, cioè 708.
Quindi sono 708 le volte in cui le due lancette puntano nella stessa direzione.

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: $\dfrac{5}{26}$.

Uno dei possibili trucchi per calcolare rapidamente l'espressione è il seguente:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2}{\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5}+2+2\cdot 5+5^2+5^3} = \\
&= \frac{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2}{\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5\right)+\left(\frac{1}{5}+1+5+5^2+5^3\right)} = \\
&= \frac{1\cdot\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2\right)}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2\right)+5\cdot\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5}+1+5+5^2\right)} = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{5}+5} = \frac{5}{26}.
\end{aligned}$$

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: $\dfrac{1}{5}$.

Se calcoliamo i primi termini di a_n otteniamo che:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 5 \\
a_2 &= 7 \\
a_3 &= \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{5} \\
a_4 &= \frac{a_3}{a_2} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{5} \\
a_5 &= \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{7} = \frac{1}{7} \\
a_6 &= \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{7}\cdot\frac{5}{1} = \frac{5}{7} \\
a_7 &= \frac{a_6}{a_5} = \frac{5}{7}\cdot\frac{7}{1} = 5 = a_1 \\
a_8 &= \frac{a_7}{a_6} = 5\cdot\frac{7}{5} = 7 = a_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dal fatto che $a_7 = a_1$ e $a_8 = a_2$ segue che la sequenza si ripete ciclicamente ogni sei termini.
Ma allora, visto che:

$$2020 = 2016 + 4 = 6 \cdot 371 + 4$$

si ha:

$$a_{2020} = a_4 = \frac{1}{5}.$$

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: 11.

Di sicuro 10 non bastano perché potrebbero essere 3 gialle, 3 rosse, 3 verdi e 1 blu, con i quali posso mettere insieme solo 3 paia di calzini non spaiati.
Mostriamo che invece 11 bastano sempre.
Come premessa facciamo un paio di osservazioni (ovvie).
La prima osservazione è che se di un colore c'è un numero pari di calzini, allora di quel colore non ci sono calzini spaiati.
L'altra osservazione è che se invece il numero di calzini di un certo colore è dispari allora di quel colore c'e' esattamente un calzino spaiato.
Detto ciò, se prendiamo 11 calzini a caso, non possiamo averne una quantità dispari per ciascuno dei 4 colori perchè altrimenti la loro somma sarebbe pari, mentre 11 è dispari.
Ciò significa che, almeno per un colore, c'è un numero pari di calzini e quindi ci sono al massimo 3 colori per i quali c'è un calzino spaiato.
Quindi i calzini spaiati sono al massimo 3 e con gli altri 8 si riesce sempre a mettere insieme 4 paia.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: 32320.

Fattorizzando 646400 si ottiene:

$$646400 = 64 \cdot 101 \cdot 100 = 2^6 \cdot 101 \cdot 10^2 = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 101.$$

Quindi, se la lista dei divisori fosse scritta in ordine crescente sarebbe facile tovarne i primi elementi:

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 16,\ 20,\ \ldots,\ 646400.$$

Ma siccome la lista dei divisori contiene il numero A se e solo se contiene $\frac{646400}{A}$, se la scriviamo in ordine decrescente è:

$$\frac{646400}{1},\ \frac{646400}{2},\ \frac{646400}{4},\ \frac{646400}{5},\ \frac{646400}{8},\ \frac{646400}{10},\ \frac{646400}{16},\ \frac{646400}{20},\ \ldots,\ 1.$$

In particolare l'ottavo numero di tale lista è $\frac{646400}{20}$, cioè 32320.

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: 90%.

Sia x la frazione di seggi del nuovo parlamento ottenuta dal Partito della Pagnotta.

Siccome i partiti sono solo 2, la frazione di seggi dell'altro partito sarà $1 - x$.

Poiché nel Partito della Pagnotta sono stati rieletti i $\frac{3}{4}$ dei parlamentari precedenti e il parlamento precedente aveva il doppio dei membri, la frazione di seggi che tale partito aveva nel parlamento precedente è $x \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$, cioè $\frac{2}{3}x$.

Analogamente si trova che la frazione di seggi dell'altro partito nel parlamento precedente era $(1-x) \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, cioè $4(1-x)$.

Ma poiché non ci sono altri partiti, la somma delle due frazioni di seggi deve fare 1, quindi otteniamo l'equazione:

$$\frac{2}{3}x + 4(1-x) = 1$$

che ha come soluzione $x = \frac{9}{10}$.

Ciò significa che nel nuovo parlamento i seggi del Partito della Pagnotta sono i $\frac{9}{10}$ del totale, cioè il 90%.

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: 44 cm.

L'area totale del rettangolo è $120\,\mathrm{cm}^2$, perché è la somma delle aree dei nove pezzi. Inoltre, dal fatto che tutti i pezzi quadrati hanno lato pari, deduciamo che anche i lati del rettangolo devono entrambi aver misura pari.

Per i lati del rettangolo ci sono quindi 4 possibilità: 10×12, 6×20, 4×30 e 2×60.

Però uno dei nove pezzi ritagliati è un quadrato di lato 8 e quindi entrambi i lati del rettangolo di partenza devono essere maggiori o uguali a 8.

Ciò significa che solo l'opzione 10×12 potrebbe andar bene.

Per convincersi che effettivamente tale opzione va bene, si osservi la figura seguente:

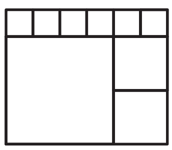

figura 1

Quindi possiamo concludere che il perimetro del rettangolo di partenza è 44.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: 360.

L'area cercata è quella evidenzata in figura **2**: vogliamo mostrare che essa è esattamente un quarto dell'area dell'ottagono. A tale scopo basterà mostrare che quella del rettangolo $ADEH$, raffigurato in figura **3**, è la metà dell'area dell'ottagono, perché i due trapezi $ABCD$ e $EFGH$ sono uguali.

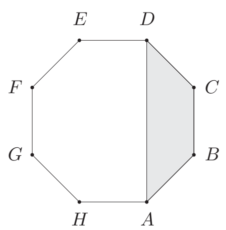

figura 2

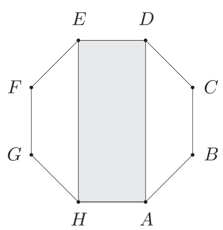

figura 3

La verifica che il rettangolo $ADEH$ è metà dell'ottagono è semplice. Infatti (vedi figura **4**) $ADEH$ è il doppio del triangolo ADH che, a sua volta, è il doppio del triangolo AOH, che è un ottavo dell'ottagono.

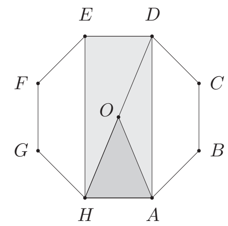

figura 4

Possiamo quindi concludere che $ADEH$ è la metà dell'ottagono e $ABCD$ un quarto, cioè 360.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: dividere per 32.

Come osservazione preliminare notiamo che partendo da una potenza di 10, qualsiasi mossa si faccia si ottiene un numero del tipo $2^\alpha \cdot 5^\beta$, con $\alpha \neq \beta$.
Se invece si parte da un numero del tipo $2^\alpha \cdot 5^\beta$, con $\alpha \neq \beta$, esiste sempre una mossa che fa diventare uguali i due esponenti, cioè che fa ottenere una potenza di 10.
Detto questo, se Claudia divide per 32, restituisce a Luca 10000, che è una potenza di 10.
A quel punto, qualsiasi mossa faccia Luca, fornirà a Claudia un numero che non è una potenza di 10 e a partire da esso Claudia potrà ancora restituire a Luca una potenza di 10 più piccola.
Entro un numero finito di mosse Claudia passerà a Luca 10^0, cioè 1, e avrà vinto.
D'altra parte, se Claudia non avesse diviso per 32, sarebbe stato Luca, alla mossa successiva, a restituire a Claudia una potenza di 10 e quindi a vincere.
Quindi l'unica mossa vincente per Claudia è dividere per 32.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: 7.
Sappiamo che n termina per 5, cioè che è della forma:

$$n = 10m + 5$$

con m intero positivo.
Quindi il suo cubo è:

$$\begin{aligned} n^3 &= (10m+5)^3 = \\ &= 1000m^3 + 1500m^2 + 750m + 125 = \\ &= 25 + 50m + (\text{multipli di } 100). \end{aligned}$$

dove abbiamo raggruppato a parte i multipli di 100 perchè non influenzano la cifra delle decine.
Si osservi ora che se m è pari allora anche $50m$ è un multiplo di 100 quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} n^3 &= 25 + 50m + (\text{multipli di } 100) = \\ &= 25 + (\text{multipli di } 100). \end{aligned}$$

nel qual caso la cifra delle decine è 2.
Se invece m è dispari possiamo scrivere $m = 2k+1$ con k intero e otteniamo:

$$\begin{aligned} n^3 &= 25 + 50m + (\text{multipli di } 100) = \\ &= 25 + 50(2k+1) + (\text{multipli di } 100) = \\ &= 75 + (\text{multipli di } 100). \end{aligned}$$

nel qual caso la cifra delle decine è 7.
Di conseguenza, se sappiamo già che la cifra delle decine di n^3 è dispari, l'unica possibilità è che sia 7.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 7200.

L'area da calcolare è quella della lunula colorata di grigio nella figura seguente:

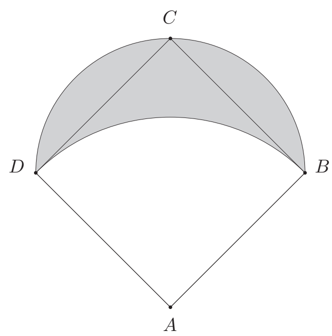

figura 5

Vogliamo mostrare che la sua area è la metà dell'area del quadrato $ABCD$.
A tale scopo basta mostrare che sono equivalenti le due zone colorate di grigio nella figura seguente:

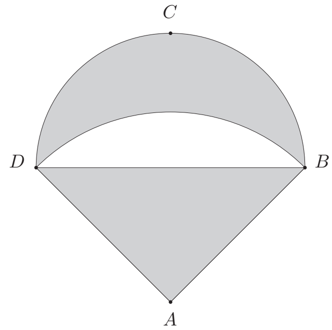

figura 6

Per convincersene si osservi che la figura **6** si può ottenere sovrapponendo il semicerchio $\mathcal{F}_1$ di figura **7** con il quarto di cerchio $\mathcal{F}_2$ di figura **8**, che hanno entrambe la stessa area: $3600\pi\,\mathrm{cm}^2$.

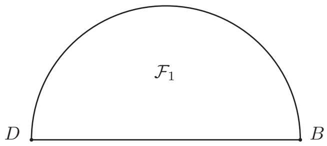

figura 7

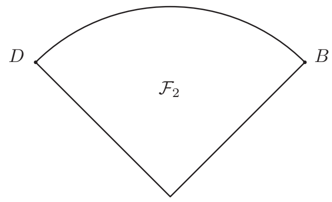

figura 8

Se indichiamo con $\mathcal{I}$ la loro intersezione, cioè la zona bianca di figura **6**, la lunula è $\mathcal{F}_1 - \mathcal{I}$ mentre il triangolo ABD è $\mathcal{F}_2 - \mathcal{I}$. Quindi la lunula e il triangolo hanno la stessa area perché differenza di figure con la stessa area.
Quindi la lunula ha la stessa area di ABD, cioè $7200\,\mathrm{cm}^2$.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 42.

Ricordiamo che se un numero intero positivo a, scomposto in fattori primi, è della forma

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

allora il numero dei suoi divisori, che si indica con $d(a)$ è dato dalla formula

$$(1) \qquad d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$$

la cui verifica è immediata se si pensa che i divisori di a sono tutti soli i numeri del tipo

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, per ogni i.
Grazie alla (1), l'unico modo di ottenere $d(n) = 11$ è che n sia del tipo

$$(2) \qquad n = p^{10}$$

con p primo, da cui segue che anche $\mathrm{MCD}(m, n)$ deve essere una potenza di p.
Combinando questa informazione col fatto che $\mathrm{MCD}(m, n)$ ha 4 divisori si ottiene che:

$$(3) \qquad \mathrm{MCD}(m, n) = p^3$$

Ma allora m deve essere della forma:

$$(4) \qquad m = p^3 \cdot H$$

dove H è un intero positivo non divisibile per p.
Combinando la (4) col fatto che m ha 12 divisori segue che m deve essere della forma:

$$(5) \qquad m = p^3 \cdot q^2$$

dove q è un altro primo diverso da p.
Mettendo insieme (2) e (5) si ottiene:

$$mn = p^{13} \cdot q^2$$

da cui segue che i divisori di mn sono $14 \cdot 3$, cioè 42.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è: 720.

I due quadrati di cui dobbiamo calcolare la differenza sono disegnati in figura **9**.

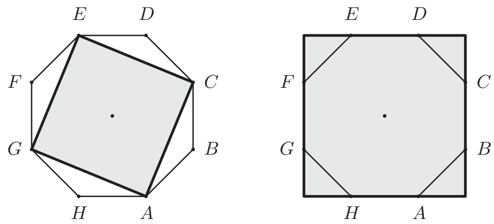

figura 9

La loro differenza è costituita dai quattro triangoli colorati di grigio in figura **10**: mostreremo che ciascuno di tali triangoli è un ottavo dell'ottagono.

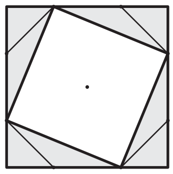

figura 10

A tale scopo si osservi figura **11**: i triangoli APC e FSE hanno la stessa area perché hanno uguali sia le basi PC ed FS sia le altezze ad esse relative.

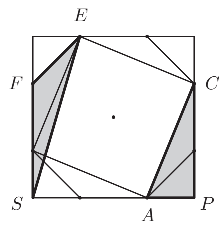

figura 11

Inoltre, osservando la figura **12**, si scopre che anche i triangoli EFO ed EFS hanno la stessa area, perché hanno la stessa base (EF) e uguali altezze rispetto a tale base.

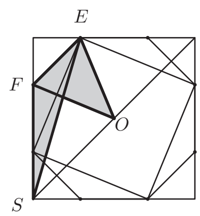

figura 12

Ma il triangolo EFO è proprio un ottavo dell'ottagono, come si vede nella figura seguente:

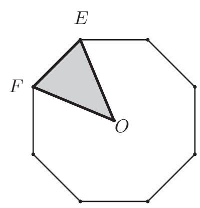

figura 13

Quindi l'area dei quattro triangoli in figura **10** è complssivamente come quella di metà ottagono, cioè 720.

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: $\dfrac{806}{225}$.

Scomponendo in fattori primi 6300 si ottiene:

$$6300 = 63 \cdot 100 = 7 \cdot 9 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

I divisori positivi di 6300 sono quindi tutti e soli i numeri del tipo:

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$$

con $\alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \quad \gamma = 0, 1, 2$ e $\delta = 0, 1$.

Di conseguenza le frazioni da sommare sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\frac{1}{2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta} \tag{6}$$

con $\alpha = 0, 1, 2, \quad \beta = 0, 1, 2, \quad \gamma = 0, 1, 2$ e $\delta = 0, 1$.
Si tratta quindi di $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$ (cioè 54) frazioni: troppe per sommarle una ad una.
Quindi ci serve un'idea per trovare il risultato in un altro modo.
Per avere l'idea giusta basta scrivere la (6) nel modo seguente:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^\beta \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^\gamma \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^\delta \tag{7}$$

dove α, β, γ e δ sono come prima.
Dalla (7) si capisce che i termini da sommare sono tutti e soli quelli che si ottengono applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione nell'espressione:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) \tag{8}$$

Questo significa che la somma cercata coincide col valore dell'espressione (8), che si calcola molto più rapidamente:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) =$$

$$= \frac{4+2+1}{4} \cdot \frac{9+3+1}{9} \cdot \frac{25+5+1}{25} \cdot \frac{7+1}{7} =$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{13}{9} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{8}{7} = \frac{13 \cdot 31 \cdot 2}{9 \cdot 25} = \frac{806}{225}.$$