XXXVI Olimpiade Italiana di Matematica

Sedi distrettuali, 25 settembre 2020

1. Su una circonferenza consideriamo nell'ordine cinque punti A, B, C, D, E. Supponiamo che le rette BC e DE si intersechino in un punto F, che F e A siano da parti opposte rispetto alla retta BE, e che la circonferenza circoscritta al triangolo BFE sia tangente (in E) alla retta AE.

   (a) Dimostrare che le rette AC e DE sono parallele.

   (b) Dimostrare che $AE = CD$.

2. Determinare tutte le coppie (a, b) di numeri interi positivi che verificano le seguenti tre condizioni:

   - $b > a$ e $b - a$ è un numero primo,
   - la cifra delle unità di $a + b$ è 3,
   - ab è il quadrato di un numero intero.

3. Siano a_1, a_2, $\ldots$, a_{2020} e b_1, b_2, $\ldots$, b_{2020} dei numeri reali, non necessariamente distinti. Supponiamo che gli interi positivi n per cui l'equazione

$$\big|a_1|x - b_1| + a_2|x - b_2| + \cdots + a_{2020}|x - b_{2020}|\big| = n \qquad (1)$$

   ha *esattamente due* soluzioni reali siano in numero finito.

   Dimostrare che gli interi positivi n per cui l'equazione (1) ha *almeno una* soluzione reale sono in numero finito.

4. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB = AC$. Sia D il piede dell'altezza uscente da C, sia M il punto medio di AC, e sia E la seconda intersezione tra il lato BC e la circonferenza circoscritta al triangolo CDM.

   Dimostrare che le rette AE, BM e CD passano per uno stesso punto se e solo se $CE = CM$.

5. Sia S l'insieme degli interi maggiori o uguali a 2. Una funzione $f : S \to S$ si dice *primordiale* se verifica le seguenti proprietà:

   - è surgettiva (cioè per ogni $s \in S$ esiste almeno un $n \in S$ tale che $f(n) = s$),
   - è crescente sui primi (cioè se $p_1 < p_2$ sono numeri primi, allora $f(p_1) < f(p_2)$),
   - per ogni $n \in S$, il valore di $f(n)$ è il prodotto di $f(p)$ al variare di p tra tutti i primi che dividono n (quindi, per esempio, $f(360) = f(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) = f(2) \cdot f(3) \cdot f(5)$).

   Determinare il massimo ed il minimo valore possibile per $f(2020)$, al variare di f tra tutte le funzioni primordiali.

6. In ogni casella di una tabella 8×8 abita un cavaliere o un furfante. Come da tradizione, i cavalieri dicono sempre la verità, mentre i furfanti mentono sempre. Tutti gli abitanti della tabella affermano che "il numero dei furfanti nella mia colonna è maggiore (strettamente) del numero dei furfanti nella mia riga".

   Determinare quante sono le possibili configurazioni compatibili con questa affermazione.