Università di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt[3]{2} = 1,2599$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Grand Tour d'Italie

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi([1])

1. *Davanti all'Acquedotto Svevo* ——— Cecilia Oliveri

Piero (*Contemplando l'Acquedotto Svevo a Sulmona*) A partire da un triangolo rettangolo il cui angolo minore misura 30°, costruisci un triangolo simile ad esso avente il cateto maggiore coincidente con l'ipotenusa del primo. (*Sandro lo ascolta guardando da vicino gli archi dell'acquedotto*) Ripeti l'operazione altre 11 volte. Qual è il rapporto tra il cateto maggiore del triangolo più grande e quello del triangolo più piccolo?
[*Dare come risposta il rapporto moltiplicato per 1000.*]

2. *La torta di Crema* ——— Sandro Campigotto

A Crema, Giulia si prepara per la selezione per una famosissima competizione televisiva di dolci.

Giulia La ricetta per la torta che voglio preparare prevede l'uso di 320 g di farina per una teglia circolare di diametro 24 cm.
Sergio Ma è troppo piccola.
Giulia Lo so: infatti la faccio in una teglia circolare di 15 cm di raggio.
Sergio Ma è più piccola!
Giulia (*Sconsolata*) No, è più grande, anche l'altezza resta la stessa.
Sergio Ma come cambiano le quantità? Quanti grammi di farina dovrai usare? (*Giulia caccia Sergio fuori dalla cucina.*)

3. *Da San Lorenzo al Mare* ——— Matteo Di Domenico

Nel ponente ligure, tra San Lorenzo al Mare e Ospedaletti, corre lungo la costa una magnifica pista ciclabile. Le buche lungo il percorso, però, sono un problema.

Shadi Hai un numero incredibile di raggi sulle tue ruote!
Maurizio (*Fermo sulla sua bicicletta*) Sono 250 per ruota, con distribuzione regolare. Così è molto probabile che un raggio sia sulla perpendicolare al terreno, come in questo momento, ad esempio.
Maurizio Hai visto la ciclabile: ogni 1,04 m, a partire da dove la mia ruota anteriore tocca terra in questo momento, troverò una buca; ogni buca allenta uno dei raggi.
Shadi Stai attento che dopo due urti in corrispondenza di un medesimo raggio la ruota cede e sarai costretto a fermarti per regolarli tutti.
Maurizio La circonferenza interna di una ruota, su cui si agganciano i raggi, misura 24 dm; la circonferenza esterna misura 25 dm. Quanti decimetri avrò percorso al primo cedimento?

4. *Nella Grotta delle Meraviglie* ——— Sandro Campigotto

Per chi si trova in Basilicata e desidera visitare la fantastica Grotta delle Meraviglie di Maratea, è un giorno fortunato: Mario ha deciso di regalare il biglietto a chi riuscirà a risolvere i suoi quesiti.

Mario Quanti sono i numeri compresi tra 1 e 10000 che si scrivono come somma di 7 numeri interi consecutivi?
Elena (Abituata alle richieste delle gare a squadre di matematica) Estremi inclusi?
Mario Sì.

([1]) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

5. *A Torbole* Silvia Sconza

A Torbole due amiche, Clara e Sofia, passeggiano sulla riva del Garda chiacchierando.

Clara Quanti anni hanno adesso i tuoi figli?

Sofia Ormai stanno diventando grandi, hanno tutti più di un anno.

Clara Vuoi dire che tutti hanno già fatto almeno il secondo compleanno?

Sofia Sì. E il prodotto delle loro età è 360.

Clara Questo non mi basta per determinare precisamente l'età dei tuoi figli.

Sofia La semisomma delle loro età è uguale al numero civico di casa tua.

Clara Non riesco ancora a determinare le loro età.

Sofia I miei due gemelli hanno gli occhi azzurri come l'acqua del lago oggi, e con quest'ultima informazione dovresti essere in grado di determinare l'età di tutti e quattro i miei figli.

Clara Hai ragione, adesso ho capito.

[*Fornire come risposta l'età del figlio maggiore moltiplicata per l'età di uno dei gemelli.*]

6. *A Cesenatico* Giuseppe Rosolini

Domenico A Cesenatico una persona su 10 ha avuto il morbillo.

Daniele L'ho già passato. (*Esce, si incammina verso il palazzetto di viale Magellano e incontra* 10 *persone. Tra sé e sé...*) Qual è la probabilità che io abbia incontrato almeno uno che ha avuto il morbillo?

[*Dare come risposta il risultato moltiplicato per* 1000]

7. *Il Castel del Monte* Sandro Campigotto

Elena Il Castel del Monte è famoso per il ricorrente numero 8 nei vari elementi della sua costruzione.

Paola Basta guardare le torri: sono otto e sono ottagonali.

Elena E il cortile interno è un ottagono. Chiama i vertici A, B, C, D, E, F, G e H, partendo da quello a sinistra del portone e girando in senso antiorario. Considerato che $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 5\,\mathrm{m}$, $AC = CE = EG = GA = 8\,\mathrm{m}$ e $AE = CG$, quanto vale l'area dell'ottagono?

8. *Nella reggia di Caserta* Lorenzo Mazza

Luigi (*Passeggiando nei giardini della reggia*) Se prendi quattro numeri interi distinti a, b, c e d, e consideri le sei possibili differenze tra essi diverse da zero...

Daniele (*Lo interrompe*) Le differenze possibili sono dodici.

Luigi Hai ragione, scusa: intendevo le distanze reciproche tra numeri diversi, cioè i valori assoluti delle differenze non-zero.

Daniele D'accordo: quelle sono sei. Ad esempio, presi 1, 3, 5 e 7 intendi $|1-3|$, $|1-5|$, $|1-7|$, $|3-5|$, $|3-7|$ e $|5-7|$.

Luigi Certo! Considera il prodotto delle sei distanze che dicevo. Nell'esempio che hai fatto è 24. Tra tutte le quadruple di numeri interi (a, b, c, d) con $0 < a < b < c < d < 1000$ tali che il prodotto delle sei distanze reciproche diverse da zero è 120, qual è quella per cui la somma $a + b + c + d$ è massima?

[*Dare come risposta la somma dei quattro numeri trovati.*]

9. *A Tropea* Lorenzo Mazza

Sdraiati sul bagnasciuga, con i piedi immersi nelle splendide acque cristalline di Tropea, Alessio e Valeria ammazzano il tempo ponendosi a vicenda problemi matematici.

Valeria Quanti sono i numeri interi $0 \le n \le 2021$ tali che il numero $91^n - 48^n - 44^n + 1$ è multiplo di 2021?

Alessio Dai, questa è facile!

10. *Sul Lago Trasimeno* Lorenzo Mazza

Sul Lago Trasimeno sorgono tre isole quasi completamente disabitate che attirano numerosi turisti grazie alla presenza di resti di costruzioni medievali. Michela ed Elisa si trovano a Castiglione del Lago e stanno aspettando il traghetto per l'Isola Maggiore.

Michela Se risolvi il problema che ti propongo, pago i biglietti per il traghetto; altrimenti li paghi tu.

Elisa Arriva tra 5 minuti, ce la faccio: proponi!

Michela Considera i polinomi $p(x) = x^3 - 3x + 1$ e $q(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ e sia r la maggiore delle radici reali del polinomio $p(x)$. Quanto vale $q(r^2)$?

11. ***Al Castello di Miramare*** — Matteo Di Domenico

A Trieste, davanti al Castello di Miramare, nello spiazzo antistante l'entrata, tra gli alberi a semicerchio e la scogliera, la guida Anna propone una sfida a un gruppo di 25 matematiche in gita.

Anna A ognuna di voi ho messo un berretto senza che poteste vedere di che colore fosse. Ora mettetevi in cerchio in modo che possiate vedere tutte le altre. Vi assicuro che ciascuna di voi vede almeno un berretto del colore che ha in testa. (*Le matematiche si dispongono lungo una circonferenza nello spiazzo, ciascuna in modo da vedere tutte le altre.*) Ogni due minuti farò suonare una sirena sul mio cellulare; chi di voi dopo la sirena mi dirà il colore del proprio berretto potrà entrare. Ovviamente: non potete comunicare tra voi in nessun modo. (*Al primo avviso, sei parlano, indovinano e entrano. Al secondo altre parlano, tutte indovinano e entrano*)

Laura (*Sottovoce, rivolta a Anna*) Quelle appena entrate erano tutte quelle con il berretto rosso. (*La sirena suona per la terza volta*) Nessuna indovina, nessuna entra. Che strano! (*Alla quarta sirena altre ancora parlano, indovinano e entrano*) Questa volta non tutte hanno il berretto dello stesso colore.

Anna Lo sapevo: i matematici ragionano bene.

Laura (*Sorridendo*) Beh, nel nostro caso erano tutte matematiche.

Anna Corretto! Hanno tutte dichiarato il colore con certezza in base a un ragionamento rigoroso.

Voce fuori campo QUANTE ENTRANO AL QUINTO AVVISO, SAPENDO CHE TUTTE QUELLE CHE HANNO AVUTO LA POSSIBILITÀ HANNO INDOVINATO?

12. ***A Senigallia*** — Sandro Campigotto

Mattia (*Camminando sotto il primo portico, all'alba*) Su quel lato della piazza, dove c'è il Caffè Italia, sorgeva un torrione circolare con un perimetro che superava i 20 metri.

Luca Il bar è già aperto.

Mattia È uno dei primi bar ad aprire in città.

Luca (*Entrando nel bar*) Quanto vale la somma delle parti intere dei numeri $\pi + \dfrac{i}{1000}$ al variare di i da 1 a 1000?

Mattia Estremi compresi?

Luca Sì. Dunque il raggio del torrione era circa di $\pi\,\mathrm{m}$.

Mattia La valutazione è buona solo perché π è una ragionevole approssimazione della radice quadrata di 10.

Voce fuori campo CHE COSA RISPONDE MATTIA ALLA DOMANDA DI LUCA?

13. ***A spasso nella Calà del Sasso*** — Lorenzo Mazza

Trovandosi nei dintorni di Asiago, Andrea e Giacomo decidono di percorrere la Calà del Sasso che, con i suoi 4444 *gradini, è la scalinata più lunga d'Italia.* Per sentir meno la fatica decidono di affrontare la salita ponendosi problemi a vicenda.

Giacomo Fattorizza 4444 in numeri primi.

Andrea $2 \times 2 \times 11 \times 101$.

Giacomo Il numero 11 è primo ed è scritto con un numero primo di cifre 1 soltanto, in notazione decimale. Ma ci sono numeri primi scritti con un numero non primo di cifre 1 soltanto, in notazione decimale?

Andrea (*Affaticato*) No.

Giacomo (*Disturbato*) Usando la fattorizzazione di 4444, puoi scrivere 4 come 2×2 e 26 come $2 \times (2 + 11)$. Ma per quanti numeri primi p anche il numero $p^4 - 26$ è primo?

Andrea Basta, Giacomo, non ce la faccio più!

14. ***In Piazza Villena*** — Cecilia Oliveri

Piazza Villena a Palermo ha una pianta a forma di ottagono regolare ed è per questo conosciuta come Ottagono del Sole.

Cecilia L'area della piazza misura $745\,\mathrm{m}^2$.

Simone Quanto vale l'area della stella a 8 punte ottenuta prolungando i lati dell'ottagono fino ad incontrarsi?

Cecilia Intendi la stella con area minore?

Simone Sì, quella.

15. *A Villaromagnano* — Silvia Sconza

A Villaromagnano c'è uno splendido ponte ciclabile sul rio del Gerbino, con una caratteristica particolare: in certi giorni dell'anno Giovanni non permette alle persone di attraversare il ponte se non rispondono correttamente alla domande che lui pone.

Giovanni Quanti sono i numeri interi positivi palindromi, con cinque cifre, che non sono divisibili per nessun numero tra 2 e 6?

Silvia Che cos'è un numero palindromo?

Giovanni Non tanto un numero, quanto una lista di segni si dice *palindroma* quando la lista coincide con la lista rovesciata, cioè data una lista ℓ di k segni e considerata la lista ℓ' il cui i-esimo segno è il segno $(k+1-i)$-esimo della lista ℓ, è $\ell = \ell'$.

Silvia Insomma la parola inno non è palindroma, ma il suo plurale sì.

Giovanni Esatto! Per i numeri considero la loro scrittura in base dieci.

Silvia Milledieci è da considerare palindromo visto che posso scriverlo con uno zero davanti.

Giovanni No, perché quando scrivo i numeri interi in notazione decimale la cifra principale è diversa da 0.

Silvia 2 e 6 compresi?

Giovanni Sì.

16. *A Sterzing* — Sandro Campigotto

A Sterzing, la rinomata azienda casearia a Ferragosto mette in palio quattro vasetti di yogurt per i visitatori più fortunati.

Lucia Dobbiamo scegliere a caso tre numeri interi x, y e z tra 0 e 2021, non necessariamente diversi.

Stefano Estremi compresi?

Lucia Esatto, se la somma $xy + yz + xz$ è un multiplo di 3 portiamo a casa gli yogurt.

Stefano Che percentuale di probabilità abbiamo di vincere?

17. *A Sepino* — Sandro Campigotto

Stefano (*Passeggiando tra le rovine dell'antica città romana di Sepino*) Chissà quante colonne in origine erano state erette in questa piazza?

Claudia L'ho letto all'entrata: tante quante le quadruple di numeri interi $a \leq b \leq c \leq d$ tali che $a \cdot b \cdot c \cdot d = 216$.

18. *Al Mulinaccio di Scandicci* — Silvia Sconza

Visitando il Mulinaccio di Scandicci, Ludovico e Roberta ritrovano una pagina di un vecchio manoscritto.

Ludovico Ascolta che frasi sono scritte:

1. Ci sono più frasi vere che false.
2. Il numero N è una potenza di 2 oppure è maggiore di 2021.
3. L'ultima cifra di N è il numero della prima frase vera.
4. Almeno 3 delle prime 4 frasi sono false.
5. N è divisibile per 27 ed è minore di 2021.
6. Tutte le frasi dispari sono false.
7. Le frasi pari sono tutte vere oppure tutte false.

Roberta Sono proprio numerate. C'è scritto che alcune di queste frasi sono vere e alcune false, ma non quali; questo non basta a determinare N.

Ludovico Aspetta, c'è una nota in fondo che dice che N è un numero intero compreso tra 1 e 8000 inclusi.

Roberta Non abbiamo comunque abbastanza informazioni!

Ludovico Hai ragione. Però possiamo determinare il massimo e il minimo valore che può assumere N.

Voce fuori campo QUAL È LA SOMMA DEI DUE VALORI DETERMINATI DA ROBERTA E LUDOVICO?

19. *Nel Pantheon* ——— Cecilia Oliveri

La struttura interna del Pantheon è formata da un cilindro sormontato sulla base orizzontale superiore da una semisfera. Il cilindro ha altezza e raggio uguali al raggio della semisfera.

Cecilia Intersecando la cupola e un piano parallelo a terra ad un'altezza di 30 m si ottiene una circonferenza di raggio 20,1 m.

Simone Quanto vale la superficie della struttura interna?

Cecilia Pavimento, pareti e soffitto?

Simone Sì, solo quello.

20. *Al Museo di Aggius* ——— Sandro Campigotto

Nel paese di Aggius, nell'entroterra gallurese, il Museo dei Briganti rievoca in poche stanze attraverso oggetti e ritagli dei secoli scorsi dei frammenti di vita passata di queste terre.

Paola (*Legge*) Da Anonimo del 1895: «All'osteria del centro ogni brigante troverà sempre due dadi a sei facce, perfettamente equilibrati. Il campione e lo sfidante tirano un dado a testa. Quest'ultimo vince se la faccia del proprio dado segna un numero strettamente maggiore di quello ottenuto dal campione. Se ciò non accade lo sfidante ha la possibilità di riprovare lanciando un'altra volta».

Voce fuori campo QUAL È LA PERCENTUALE DI PROBABILITÀ DI VITTORIA PER LO SFIDANTE?

21. *Nel castello di Fénis* ——— Giuseppe Rosolini

Carlo (*Nel cortile del castello di Fénis*) Chiediamo a quel signore di fare una foto a tutto il gruppo?

Silvano D'accordo. Siamo in nove, siamo tutti di altezze diverse: cerchiamo di disporci in modo che siamo tutti visibili.

Carlo Ci mettiamo su tre file: in ogni fila mettiamo il più alto della fila al centro. Così è tutto ordinato.

Silvano Però dobbiamo assicurarci che quelli delle file davanti non coprano quelli delle file dietro: quelli nella stessa posizione sulle tre file sono in ordine crescente a partire dalla fila davanti.

Roberto Vuoi dire che, se ad esempio tu, Carlo e io siamo nella seconda posizione di tre file diverse, tu, che sei il più basso, stai nella fila davanti, io, che sono il più alto, sto nella fila dietro.

Silvano Sì'! E Carlo sta nella fila di mezzo.

Roberto Però, io non posso stare nella seconda posizione della fila dietro. Claudio è il più alto di tutti e non può stare che in quella posizione.

Pino Certo! In effetti c'è un solo modo per organizzare la posa per la foto.

Carlo (*Stupito*) Non è vero!

Voce fuori campo IN QUANTI MODI SI PUÒ ORGANIZZARE IL GRUPPO PER LA FOTO A SODDISFARE LE CONDIZIONI RICHIESTE DA SILVANO?

Gara di matematica a squadre femminile 2021
Soluzioni

Università di Genova

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto, Simone Di Marino, Lorenzo Mazza e Francesco Veneziano, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Di Domenico, Elena Espa, Andrea Giusto, Cecilia Oliveri, Luca Renzi, Simone Sanna, Silvia Sconza, Simone Traverso, Anna Ulivi.
Sono tutti ex-giocatori iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Sia x_N la lunghezza del cateto maggiore del triangolo N. Per costruzione per ogni N si ha $x_N = \dfrac{2x_{N-1}}{\sqrt{3}}$. Poiché l'operazione viene effettuata in totale 12 volte il cateto dell'ultimo triangolo misura $x_{13} = \dfrac{2^{12}x_1}{3^6}$. Il rapporto risulta quindi $\dfrac{4096}{729} \approx 5{,}61865$.
La risposta è `5618`.

Soluzione del problema 2. Il rapporto lineare è $\dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$. Dunque il rapporto areale è $\dfrac{25}{16}$ e i grammi di farina sono $\dfrac{25}{16} \times 320\,\text{gr} = 500\,\text{gr}$.
La risposta è `500`.

Soluzione del problema 3. Poiché si hanno 250 raggi in una ruota di $250\,\text{cm}$ a ogni buca si allenta un raggio. A partire dalla prima buca, successivamente in corrispondenza di ognuna si allenta il 104esimo raggio dal precedente (nel senso di rotazione). La ruota anteriore cede dopo $k+1$ buche con $k > 0$ minimo tale che $k \cdot 104 \equiv 0 \pmod{250}$, cioè $k \cdot 52 \equiv 0 \pmod{125}$. Quindi $k = 125$ poiché 52 e 125 sono coprimi. I centimetri percorsi sono $126 \times 104\,\text{cm} = 13104\,\text{cm}$.
La risposta è `1310`.

Soluzione del problema 4. Il più piccolo numero intero positivo scrivibile come somma di 7 numeri consecutivi è (proprio) $7 = (-2)+(-1)+0+1+2+3+4$. I successivi si ottengono tutti aggiungendo 1 ad ogni addendo, così ogni numero sarà della forma $7 + 7x = 7(x+1)$. Il numero più alto di tale forma minore di 10000 è $\left[\frac{10000}{7}\right] \cdot 7 = 1428 \cdot 7$ che si ottiene per $x = 1427$.
La risposta è `1428`.

Soluzione del problema 5. Sappiamo che tutti e quattro i figli hanno almeno due anni; le combinazioni di quattro numeri, maggiori o uguali a 2, il cui prodotto è 360 sono: $\{45,2,2,2\}$, $\{30,3,2,2\}$, $\{18,5,2,2\}$, $\{15,6,2,2\}$, $\{10,9,2,2\}$, $\{20,3,3,2\}$, $\{15,4,3,2\}$, $\{12,5,3,2\}$, $\{10,6,3,2\}$, $\{9,5,4,2\}$, $\{6,6,5,2\}$, $\{10,4,3,3\}$, $\{8,5,3,3\}$ e $\{6,5,4,3\}$. Poiché Clara dice di non poter determinare univocamente le età anche sapendo la loro somma, vuol dire che la somma corrisponde a più di una combinazione; questo succede solo con $\{9,5,4,2\}$

e $\{10,4,3,3\}$ che hanno somma 20 o con $\{6,6,5,2\}$ e $\{8,5,3,3\}$ che hanno somma 19. Sappiamo però che la somma è pari, quindi siamo nel primo caso. A questo punto la combinazione corretta è $\{10,4,3,3\}$ poiché sappiamo che ci sono due gemelli, che hanno quindi la stessa età.
La risposta è `0030`.

Soluzione del problema 6. La probabilità che, incontrando una persona, questa non abbia avuto il morbillo è $\frac{9}{10}$. E la probabilità che, incontrando 10 persone, nessuna di queste abbia avuto il morbillo è $\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$. Dunque la probabilità richiesta è $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0{,}6513$.
La risposta è `0651`.

Soluzione del problema 7. L'area dell'ottagono è data dalla somma dell'area del quadrato con vertici $ACEG$ con le aree dei 4 triangoli rimanenti (uguali tra loro). L'area del quadrato è $8^2\,\mathrm{m}^2 = 64\,\mathrm{m}^2$. Essendo l'altezza relativa alla base del triangolo isoscele EFG uguale a $\sqrt{5^2-4^2}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$, la sua area è $\frac{3\cdot 8}{2}\,\mathrm{m}^2 = 12\,\mathrm{m}^2$, uguale alle aree dei triangoli ABC, CDE e GHA). Dunque l'area dell'ottagono è $(4\cdot 12+64)\,\mathrm{m} = 112\,\mathrm{m}$.
La risposta è `0112`.

Soluzione del problema 8. Per il *pidgeonhole principle*, almeno due dei numeri hanno lo stesso resto nella divisione con 3, dunque la loro differenza è un multiplo di 3, come pure almeno due coppie di numeri distinti hanno la stessa parità e le loro differenze sono multiplid di 2. Così per ogni quadrupla come nel testo, 12 divide il prodotto delle distanze. Perciò tra le quadruple richieste si trova che quelle con $a=1$ sono $1<2<3<6$ e $1<4<5<6$ dato che $120 = 1\times 1\times 2\times 3\times 4\times 5$ (è necessario, non sufficiente, che ogni fattore maggiore dei primi due si scriva come somma di altri due fattori). Dato che il valore richiesto è stabile per traslazione degli argomenti, tra le quadruple richieste quella con somma massima è $(994, 997, 998, 999)$.
La risposta è `3988`.

Soluzione del problema 9. Si noti che $91 = 43+47+1$, così il numero $p(n) = 91^n - 48^n - 44^n + 1$ è tale che

$$\begin{aligned} p(n) &\equiv 48^n - 48^n - 1 + 1 \pmod{43} \equiv 0 \pmod{43} \\ &\equiv 44^n - 1 - 44^n + 1 \pmod{47} \equiv 0 \pmod{47} \\ &\equiv 0 \pmod{2021}, \end{aligned}$$

qualunque sia n intero positivo o nullo, dato che $2021 = 43\cdot 47$; ovvero $p(n)$ è multiplo di 2021 per qualunque numero n intero positivo o nullo.
La risposta è `2022`.

Soluzione del problema 10. Per a numero reale qualunque, $p(a)^2 = q(a^2) + 2p(a)$. Se a è una radice di $p(x)$, allora $q(a^2) = 0$.
La risposta è `0000`.

Soluzione del problema 11. Chi indovina alla prima sirena ha il copricapo di un colore che ha una sola altra. Alla seconda sirena entrano quelle che sono certe che ci siano tre con il berretto dello stesso colore: riescono a indovinare perché c'è un solo colore con tale caratteristica: ognuna di esse infatti ne vede due con il berretto dello stesso colore e conclude di essere la terza poiché le altre non hanno indovinato subito. Dato che alla terza sirena nessuna indovina, non c'è un singolo colore condiviso da 4. Prima della quarta sirena ne

rimangono 16 fuori. Dopo la sirena chi entra condivide il berretto con altre quattro, sa che non sono le uniche con quel colore perché altrimenti sarebbero entrate alla terza sirena. Se ne entrassero 15, una rimarrebbe sola, che non è possibile. Perciò, dato che ci sono almeno due colori tra chi entra, sono in 10. Al quinto turno entrano le 6 rimaste che hanno tutte il berretto dello stesso colore.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 12. Il numero $\pi + \frac{i}{1000}$, $i = 1, \ldots, 1000$, vale 3 o 4. Vale 4 per gli indici i tali che $i + 141 \geq 1000$, cioè per 142 indici.
La risposta è `3142`.

Soluzione del problema 13. Dato $n^4 = 1 \pmod 5$ se $n \neq 0 \pmod 5$, si ha che $p^4 - 26 = 0 \pmod 5$ qualunque sia p primo diverso da 5. E $5^4 - 26 = 599$ è primo.
La risposta è `0001`.

Soluzione del problema 14. Sia a il lato dell'ottagono. La stella si può ottenere come sovrapposizione dei due quadrati prolungando quattro lati non consecutivi. Il lato di uno dei quadrati è la somma $a + \frac{2}{\sqrt{2}}a = a\left(1 + \sqrt{2}\right)$. L'area di uno dei quattro triangoli aggiunti all'ottagono per ottenere il quadrato è $\frac{1}{4}a^2$. Dunque l'area dell'ottagono è $A = a^2\left(2 + 2\sqrt{2}\right) = 2a^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$ e l'area della stella è

$$A + 2a^2 = A\left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right) = A\sqrt{2} \approx 1053\,\mathrm{m}^2.$$

La risposta è `1053`.

Soluzione del problema 15. Conviene calcolare quanti sono i numeri palindromi con cinque cifre divisibili per almeno un numero tra 2 e 6 e sottrarre il risultato al numero totale di numeri palindromi con cinque cifre: basta controllare le divisibilità per 2, 3 e 5.
Un numero è divisibile per 2 se e solo se termina con una cifra pari; innanzitutto osserviamo che l'unico numero palindromo che termina con la cifra 0 è proprio 0. Se invece il numero termina con una qualsiasi altra cifra pari, allora le restanti cifre del numero possono essere scelte a piacere, ovvero in 100 modi: 10 possibili scelte per la penultima, e quindi seconda, cifra e altre 10 possibili scelte per la terza.
Un numero è divisibile per 5 ma non per 2 se termina con la cifra 5, anche in questo caso ottieniamo 100 possibili numeri.
Partendo sempre fissando l'ultima cifra, calcoliamo adesso i numeri divisibili per 3, ma non per 2 o per 5: tale cifra potrà essere 1, 3, 7 oppure 9. Poiché 3 e 9 sono nella stessa classe modulo 3, basta fare il conto per uno solo dei due e poi raddoppiarlo; stesso discorso per 1 e 7.
Supponiamo che l'ultima cifra (e quindi la prima) sia 3: se la penultima cifra fosse 0, 3, 6 oppure 9, allora quella centrale potrà essere una a scelta tra 0, 3, 6 e 9. Se la penultima cifra fosse 1, 4 oppure 7, allora quella centrale potrà essere una a scelta tra 1, 4 e 7. Se la penultima cifra fosse 2, 5 oppure 8, allora quella centrale potrà essere una a scelta tra 2, 5 e 8. Ci sono quindi in tutto 34 numeri accettabili. Ci saranno quindi anche 34 numeri accettabili con ultima cifra 9.
Allo stesso modo si calcola che i numeri con ultima cifra 7 oppure 1 sono in tutto $33 \cdot 2 = 66$.
Tutti i possibili numeri palindromi di cinque cifre sono: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (ricordando che non esistono numeri palindromi di cinque cifre che terminano con 0).
La risposta è `0266`.

Soluzione del problema 16. Che $xy + yz + xz$ sia un multiplo di 3 dipende dai resti dei numeri x, y e z nella divisione con 3, Dato che $2021 = 2 + 3 \times 673$, la probabilità che

ciascun numero abbia resto 1, così come resto 2 o 0, è $q = \frac{1}{3}$. I casi possibili di resti sono 27. I casi favorevoli, ciascuno con probabilità $p = q^3$, sono dati dalle seguenti terne di resti: esattamente tre resti sono 0; esattamente due resti sono 0; tutti i resti sono uguali e diversi da 0. In totale i casi sono 9 e indipendenti; la probabilità che si verifichi uno di questi è $\frac{1}{3}$.
La risposta è `0033`.

Soluzione del problema 17. La fattorizzazione è $216 = 3^3 \cdot 2^3$. Per i casi con fattori tutti positivi, se $b = 1$, un fattore può essere scelto in $4 \times 4 = 16$ modi. Dato che un fattore determina univocamente l'altro e il terzo deve essere il minore, il terzo può essere scelto in $\frac{16}{2} = 8$ modi. In modo simile, se $b \neq 1$, i casi possibili per a e b sono $a = 1$, $b = 2, 3, 4, 6$, poi $a = 2$, $b = 2, 3$, infine $a = 3$, $b = 3$. In ciascuno si trovano rispettivamente $\frac{3\times4-2}{2} = 5$ modi, $\frac{3\times4-4}{2} = 4$ modi, $\frac{3\times1-1}{2} = 1$ modo, 1 modo, $\frac{3\times2}{2} = 3$ modi, $\frac{3\times2}{2} = 3$ modi, $\frac{2\times2}{2} = 2$ modi; in totale 27 modi. Altrettanti se i fattori sono tutti negativi.
I casi in cui i fattori sono due positivi e due negativi sono tanti quante tutte le fattorizzazioni di 216 in quattro fattori positivi dato che, comunque si scelga la coppia di fattori a cui "cambiare segno", i quattro fattori saranno ordinabili in un unico modo. L'unica particolare condizione a cui si deve fare attenzione è per quadruple di fattori non tutti distinti tra loro che possono essere 1, 2, 3 e 6. Per ciascuno di questi quattro numeri c'è una fattorizzazione con tre fattori uguali che deteminano due fattorizzazioni con fattori a segni non tutti uguali, e ce ne sono rispettivamente sette, tre, tre e una con due fattori uguali che ne determinano quattro. Ciascun delle altre a fattori tutti diversi determina sei fattorizzazioni.
Le fattorizzazioni di 216 sono $27 \times 2 + 4 \times 2 + 14 \times 4 + 9 \times 6 = 172$.
La risposta è `0172`.

Soluzione del problema 18. Notiamo subito che la frase 4 determina soltanto due situazioni possibili tra le prime tre frasi: se due frasi sono false, anche la terza è falsa; se una frase è vera, almeno una delle altre due è vera. In particolare, la configurazione dove esattamente una delle prime tre frasi è vera non può avvenire. Stabiliamo ora le possibili combinazioni di verità delle frasi.

I. ***6 vera.*** Così 1, 3, 5 e 7 sono false; così anche 2 è falsa e 4 è vera.

II. ***6 falsa e 4 vera.*** Così 1, 2 e 3 sono false, e 7 è falsa. Se 5 è falsa, tutte le frasi dispari sono false a contraddire 6; dunque 5 è vera.

III. ***6 falsa, 4 falsa e 7 vera.*** Poiché 7 è vera, la frase 2 deve esssere falsa come le altre pari; così 1 e 3 sono vere. Dato che 1 è vera, 5 deve essere vera.

IV. ***6 falsa, 4 falsa e 7 falsa.*** Dato che 7 è falsa, almeno una pari deve essere vera; dunque 2 è vera da cui segue che 5 è falsa. Di conseguenza 1 è falsa e 3 deve essere vera.

Per ognuna delle quattro combinazioni stabiliamo massimo e minimo valore possibile per N che discendono dalle frasi 2, 3 e 5.

I. 2 falsa, 3 falsa, 5 falsa: N non è una potenza di 2, ma è minore o uguale a 2021; l'ultima cifra di N non è 4; N non è divisibile per 27. Il valore massimo per N è 2021; il minimo è 3.

II. 2 falsa, 3 falsa, 5 vera: N non è una potenza di 2, ma è minore o uguale a 2021; la sua ultima cifra non è 4; N è divisibile per 27 ed è minore di 2021. Il valore massimo per N è 1998; il minimo è 27.

III. 2 falsa, 3 vera, 5 vera: N non è una potenza di 2 ed è minore o uguale di 2021; l'ultima cifra di N è 1; 27 divide N e N è minore di 2021. Il valore massimo per N è 1971; il minimo è 81.

IV. 2 vera, 3 vera, 5 falsa: N è una potenza di 2 oppure è maggiore di 2021; l'ultima cifra di N è 2; 27 non divide N oppure N è maggiore o uguale a 2021. Il valore massimo per N è 7992; il minimo è 2.

La risposta è 7994.

Soluzione del problema 19. Sia r la lunghezza in m del raggio della semisfera. La superficie interna totale è data dalla somma della superficie della semisfera, la superficie laterale del cilindro e la base del cilindro: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r^2 + \pi r^2 = 5\pi r^2$. Supponendo $r > 30$ e definendo $x = r - 30$, vale la seguente relazione: $x^2 + 20,1^2 = r^2$. Mettendo le due equazioni a sistema si ottiene $r = 21{,}7335 < 30$ che è assurdo. Dunque $r \leq 30$ e fissiamo $x = 30 - r$. Il risultato del sistema rimane invariato, ma in questo caso è coerente con la nostra ipotesi. La superficie totale è quindi $S \approx 7419\,\mathrm{m}^2$.
La risposta è 7419.

Soluzione del problema 20. I risultati del gioco sono triple (x_1, x_2, x_3) di numeri interi compresi tra 1 e 6; il campione vince se $x_1 \geq \max(x_2, x_3)$. I casi possibili sono 6^3, i casi favorevoli sono $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 7 \times 13$. La sua probabilità di sconfitta (e di vittoria per lo sfidante) è $1 - \frac{7\times 13}{6^3} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$.
La risposta è 0057.

Soluzione del problema 21. Per contare le disposizioni, indicate con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 le nove persone (9 la più alta), si può notare che si devono disporre nelle posizioni

$$\begin{matrix} \mathsf{s}_3 & \mathsf{c}_3 & \mathsf{d}_3 \\ \mathsf{s}_2 & \mathsf{c}_2 & \mathsf{d}_2 \\ \mathsf{s}_1 & \mathsf{c}_1 & \mathsf{d}_1 \end{matrix}$$

dove l'indice di riga aumenta da davanti a dietro, ad esempio 9 deve stare in posizione c_3.
A cominciare dalla persona più bassa 1, questa può andare in s_1 oppure in d_1; la persona 2 deve andare in d_1 o s_1 reciprocamente. A questo punto, soltanto dopo che tutte le altre posizioni in prima riga sono occupate, una delle successive persone può andare in c_1 (in particolare, 2 può andare in una qualunque delle posizioni s_2, d_2, c_1). Allo stesso modo una persona potrà essere piazzata in c_2 soltanto quando, di quelle che la precedono in altezza, due sono nelle posizioni s e due sono nelle posizioni d. Determinare una disposizione come richiesta delle nove persone è la stessa cosa che scrivere liste di nove caratteri usando i tre segni s, c e d, facendo però attenzione che i segni c siano preceduti da almeno lo stesso numero sia di segni s che segni d. Se s, c e d sono tali numeri per una qualunque posizione nella lista, deve essere $c \leq s$ e $c \leq d$ con $0 \leq s, c, d \leq 3$. La lista corrisponde a dare un percorso di nove segmenti di lunghezza 1 che congiunga il punto $(0; 0; 0)$ con il punto $(3; 3; 3)$ toccando soltanto punti $(s; c; d)$ con $c \leq s$ e $c \leq d$—per c fissato, di tali punti ce ne sono $(4 - c)^2$. I percorsi $P_{(i;k;j)}$ con cui si può raggiunge il punto $(i; k; j)$ sono la somma $P_{(i-1;k;j)} + P_{(i;k-1;j)} + P_{(i;k;j-1)}$ e $P_{(0;0;0)} = 1$ e $P_{(n;m;\ell)} = 0$ se una delle componenti è minore di 0 oppure $m > n$ oppure $m > \ell$.
La risposta è 0192.