Unione Matematica Italiana
Ministero dell'Istruzione

Olimpiadi della Matematica

Gara di ~~Febbraio~~

30 marzo – 9 aprile 2021

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Quanti sono i numeri di 6 cifre divisibili per 33 che siano palindromi, cioè che rimangano uguali se letti da destra verso sinistra?

   (A) 30 **(B)** 33 **(C)** 300 **(D)** 333 **(E)** Nessuna delle precedenti.

2. Di un triangolo di vertici A, B, C sappiamo che $AB = 5$, $BC = 4$ e $AC = AM$, dove M è il punto medio del lato BC. Quanto vale la lunghezza del lato AC?

   (A) 4 **(B)** $\sqrt{17}$ **(C)** $3\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{5}$ **(E)** $\sqrt{21}$

3. Quanto vale la somma delle cifre del numero $20^{21} + (10^{2021} + 21)^2$?

   (A) 21 **(B)** 30 **(C)** 37 **(D)** 42 **(E)** Un numero maggiore di 100.

4. Siano a, b, c interi, ciascuno compreso fra 1 e 2021 (estremi inclusi), che soddisfano l'equazione

   $$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + c\sqrt{b}}.$$

   Quanti sono i possibili valori distinti di c?

   (A) 130 **(B)** 132 **(C)** 133 **(D)** 1936 **(E)** 2025

5. Nello studiare il polinomio $p(x) = x^2 + 2x - 6$, Enrica ha scoperto due numeri reali distinti α e β tali che $p(\alpha) = \beta$ e $p(\beta) = \alpha$. Quanto vale $\alpha + \beta$?

   (A) -3 **(B)** $-2\sqrt{2}$ **(C)** 0 **(D)** 2 **(E)** 6

6. I partecipanti a un convegno di furfanti (che mentono sempre) e cavalieri (che dicono sempre la verità) sono numerati da 1 a 2021. Ciascuno di essi dichiara: "si possono formare almeno i terne di partecipanti di cui io faccia parte e che contengano esattamente due cavalieri", dove i è il numero assegnato alla persona che parla. Quanti sono i valori possibili per il numero di furfanti presenti al convegno?

   (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 2021 **(E)** 2022

7. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Sia H il piede dell'altezza uscente da B e sia D l'intersezione fra la bisettrice dell'angolo in A e il lato BC. Supponiamo che HD sia perpendicolare a BC. Quanto vale $(\frac{AB}{BC})^2$?

   (A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **(C)** $\sqrt{5}$ **(D)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **(E)** Una tale configurazione non si può realizzare.

8. Il piccolo Boole ha disegnato una striscia di 8 caselle, in ognuna delle quali può essere scritto uno 0 o un 1. Inizialmente ogni casella contiene uno 0. Ad ogni mossa, Boole compie una delle seguenti operazioni:

   (a) sostituisce ogni 0 con un 1 e ogni 1 con uno 0;

   (b) sceglie tre caselle consecutive e solo in queste sostituisce ogni 0 con un 1 e viceversa.

   Quante diverse combinazioni di 0 e 1 può ottenere Boole?

   (A) 2^5 **(B)** 2^6 **(C)** 2^7 **(D)** $2^8 - 2$ **(E)** 2^8

9. Per ogni reale non negativo x, definiamo $\lfloor x \rfloor$ come la *parte intera* di x, ovvero il più grande intero minore o uguale di x, e $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ come la *parte frazionaria* di x.

   Sia p una soluzione reale positiva **non** intera dell'equazione $\{z\lfloor z \rfloor\} = 2021\{z\}$. Qual è il **secondo** più piccolo valore possibile di $\lfloor p \rfloor$?

   (A) 2021 **(B)** 2022 **(C)** 3033 **(D)** 4042 **(E)** 4043

10. Determinare il numero di terne ordinate (a,b,c) di interi non negativi tali che ciascuno dei numeri 2^a, 2^b, 2^c sia minore di 10000 e che il numero $2^a + 2^b + 2^c$ sia un divisore di $8^a + 8^b + 8^c$.

    (A) 14 **(B)** 50 **(C)** 53 **(D)** 72 **(E)** 86

11. Sia ABC un triangolo equilatero di lato unitario e sia P un punto dalla parte opposta della retta AB rispetto al punto C, tale che l'angolo $\widehat{APB}$ misuri $60°$. Supponiamo che la bisettrice dell'angolo $\widehat{APB}$ intersechi i segmenti AB e AC nei punti X e Y, rispettivamente. Qual è il minimo valore possibile per l'area del triangolo AXY?

    (A) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ **(B)** $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ **(E)** Nessuna delle precedenti.

12. Sia N il numero di sestuple ordinate di interi (a,b,c,d,e,f) tali che $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3 = 168$ e $-202120212021^9 < abcdef < 202120212021^9$, dove $abcdef$ è il prodotto dei sei interi. Quale dei seguenti è il resto di N nella divisione per 6?

    (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Il numero 144 è molto particolare in quanto gode della *proprietà speculare*: non solo è vero che $144 = 12^2$ (ossia è un quadrato perfetto), ma è vero anche che $441 = 21^2$, cioè invertendo l'ordine delle sue cifre si ottiene precisamente il quadrato del numero ottenuto invertendo le cifre della sua radice quadrata. Anche il numero 100 ha la proprietà speculare, così come il numero 1, mentre il numero 49 no. Quanti sono i numeri interi **positivi** con al più 3 cifre che godono della proprietà speculare?

14. Una cavalletta si muove sul piano e dal punto di coordinate (x,y) può saltare a sua scelta o su $(x+y,y)$ o su $(x,x+y)$. È partita da un punto di coordinate $(n,9)$ con n intero positivo, ma non ricorda il valore di n. Sa solo che dopo un certo numero di mosse è arrivata in $(2021, 2050)$. Quanti sono i possibili valori di n?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un rettangolo e sia E un punto arbitrario, diverso da C, sul lato DC. Sia H la proiezione di E sulla diagonale AC e sia K la proiezione di C sulla semiretta AE.

(a) Dimostrare che K giace sulla circonferenza circoscritta ad $ABCD$ e che il quadrilatero $CKEH$ è ciclico, cioè inscrivibile in una circonferenza.

(b) Dimostrare che $\widehat{CKB} + \widehat{CKH} = 90°$.

(c) Dimostrare che K, H, B sono allineati se e solo se $ABCD$ è un quadrato.

SOLUZIONE:

Nome:________________ Cognome:________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Ambra costruisce una sequenza di numeri, a partire da numero reale positivo x_0, nel seguente modo: dato l'n–esimo termine x_n, il termine successivo è $x_{n+1} = \left\{1 - \frac{1}{x_n}\right\}$, dove $\{\alpha\}$ rappresenta la *parte frazionaria* di α, cioè la differenza fra α e il massimo numero intero minore o uguale di α. Non appena Ambra ottiene un termine uguale a 0, interrompe la sequenza.

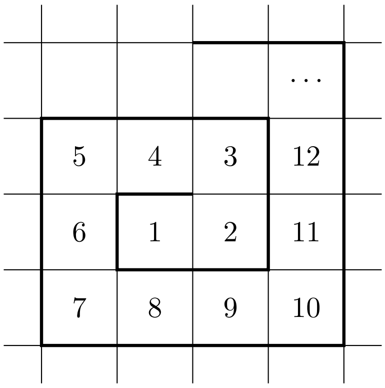
(a) Dimostrare che se il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi, prima o poi la sequenza si interrompe.

(b) Dimostrare che, se la sequenza si interrompe, allora il punto di partenza x_0 era della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**



Una mappa del tesoro è costituita dalla cartina di un'isola (infinitamente estesa in tutte le direzioni) a cui è sovrapposta una griglia quadrata. Le caselle della griglia sono numerate a spirale come in figura.

I pirati hanno nascosto il loro tesoro suddividendolo in forzieri che hanno seppellito in alcune delle caselle, quelle "numerate con quegli n che racchiudono in sé le indicazioni per raggiungerle dalla casella 1". Con questa frase i pirati intendono dire quanto segue: scrivendo il numero n in base dieci, chiamiamo $a_1, \ldots, a_k$ le sue cifre, lette da sinistra verso destra; nella casella n c'è un forziere con parte del tesoro se (e solo se) la si può raggiungere partendo dalla casella 1 ed effettuando a_1 passi in una certa direzione (Nord, Sud, Ovest o Est), a_2 passi in una certa direzione (eventualmente la stessa di prima), ... e infine a_k passi in una delle 4 direzioni.

Per esempio: nella casella 12 c'è un forziere, perché partendo da 1 e facendo 1 passo verso Nord e 2 passi verso Est si arriva proprio in 12. Nella casella 1, invece, non c'è alcun forziere, perché in qualunque direzione si faccia un passo partendo da 1, si finisce in una casella diversa dalla 1. Dimostrare che c'è solamente un numero finito di caselle in cui è seppellito un forziere.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Alberto Alfarano, Alberto Cagnetta, Alessandro Iraci, Andrea Ciprietti, Andrea Gallese, Davide Di Vora, Federica Bertolotti, Federico Poloni, Filippo Girardi, Giovanni Barbarino, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Leonardo Franchi, Linda Friso, Lorenzo Benedini, Lucio Tanzini, Ludovico Pernazza, Matteo Casarosa, Nikita Deniskin, Riccardo Zanotto, Sabrina Botticchio, Silvia Pagani.
Un ringraziamento particolare a Riccardo Zanotto, Andrea Gallese e Ludovico Pernazza per la stesura delle soluzioni dei quesiti a risposta multipla.

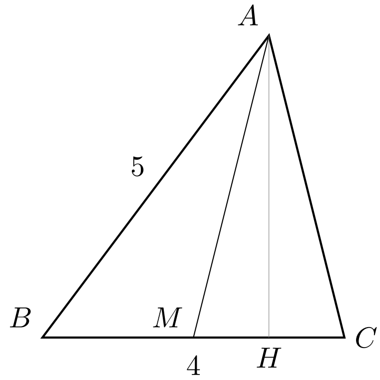
Alessandra Caraceni, Luigi Amedeo Bianchi e Davide Lombardo

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(C)**. Dato che il numero è palindromo, possiamo scriverlo come $abccba$, dove a,b,c sono cifre e $a \neq 0$. Il criterio di divisibilità per 11 è allora automaticamente soddisfatto, essendo $a - b + c - c + b - a = 0$.

   Per il criterio di divisibilità per 3 occorre che $2(a+b+c)$ sia multiplo di 3, ovvero che il numero abc sia multiplo di 3; la risposta è dunque il numero di interi $100 \leq n \leq 999$ multipli di 3, che sono $\frac{999-102}{3} + 1 = 300$.

2. La risposta è **(B)**.



   Poiché M è punto medio otteniamo che $BM = MC = 2$. Sia H il punto medio di MC, e in particolare $MH = HC = 1$; dato che il triangolo AMC è isoscele su base MC, H è anche il piede dell'altezza e perciò l'angolo $\angle AHB$ è retto.

   Dunque il triangolo ABH è rettangolo, con ipotenusa AB lunga 5 e cateto BH lungo 3; ne consegue che $AH = 4$. Infine AC è ipotenusa del triangolo AHC, perciò $AC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

3. La risposta è **(D)**. Possiamo espandere il quadrato

$$N = 20^{21} + (10^{2021} + 21)^2 = 10^{4042} + 42 \cdot 10^{2021} + 2^{21} \cdot 10^{21} + 21^2$$

   Osserviamo che non ci sono riporti tra gli addendi scritti, dunque il risultato è la somma della somma delle cifre di 1,42,2^{21},21^2.

   Dato che $2^{21} = 2 \cdot 1024^2 = 2097152$ ha somma delle cifre 26 e $21^2 = 441$ ha somma delle cifre 9, la soluzione è $1 + 6 + 26 + 9 = 42$.

4. La risposta è **(A)**. Elevando al quadrato l'equazione del testo otteniamo la condizione equivalente $a + 2\sqrt{ab} + b = a + c\sqrt{b}$, da cui sottraendo a e dividendo per $\sqrt{b}$ si arriva a

$$2\sqrt{a} + \sqrt{b} = c.$$

   Affinché c sia intero, entrambi a e b devono essere dei quadrati perfetti. Questo si può osservare elevando al quadrato l'uguaglianza $2\sqrt{a} = c - \sqrt{b}$, da cui si ottiene $4a = c^2 + b - 2c\sqrt{b}$; pertanto $\sqrt{b}$ è un numero razionale, quindi b è un quadrato perfetto, e in particolare $\sqrt{b}$ è intero. Tornando all'equazione di partenza $2\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$ se ne deduce immediatamente che anche a deve essere un quadrato perfetto.

   Data la condizione a,$b \leq 2021$, dobbiamo perciò contare quanti valori assume l'espressione $2x+y$ con $1 \leq x$,$y \leq 44$.

   È facile vedere che vengono presi tutti e soli i valori tra 3 e $3 \cdot 44$ compresi: con $x = 1$ si riempie l'intervallo $[3{,}46]$, con $x = 23$ si prende l'intervallo $[47{,}88]$ e infine con $x = 44$ si raggiungono anche i numeri nell'intevallo $[89, 132]$.

5. La risposta è **(A)**. Le condizioni imposte si traducono nel sistema

$$\begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha - 6 = \beta \\ \beta^2 + 2\beta - 6 = \alpha \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni otteniamo $\alpha^2 + 2\alpha - (\beta^2 + 2\beta) = \beta - \alpha$; scrivendo $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ e raccogliendo un fattore $\alpha - \beta$, questa conduce a

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 2 + 1) = 0$$

Poiché $\alpha \neq \beta$, vale che $\alpha + \beta = -3$.

6. La risposta è **(B)**. Dividiamo in casi a seconda del numero di cavalieri:

   (a) La configurazione con 0 cavalieri, ovvero tutti furfanti, è sicuramente valida.

   (b) Una configurazione con esattamente 1 cavaliere è impossibile, perché questi affermerebbe di poter trovare almeno un altro cavaliere.

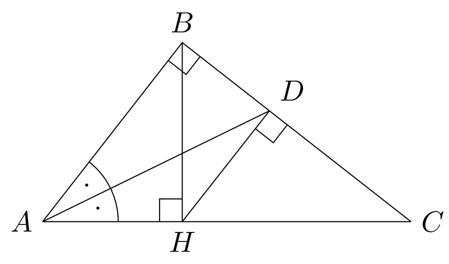
   (c) Se ci sono esattamente 2 cavalieri, la sequenza $CCFF\ldots$ è valida: infatti per i primi due cavalieri è possibile formare una terna con uno qualunque dei 2019 furfanti; inoltre ogni furfante ha esattamente una terna disponibile, dunque sta effettivamente affermando il falso.

   (d) Con 3 cavalieri il discorso è del tutto analogo, e la sequenza $CCCFF\ldots$ è valida.

   (e) Se ci sono almeno 4 cavalieri, osserviamo intanto che esiste almeno un furfante, poiché c'è almeno una terna "CCF". Ma allora ogni furfante può trovare almeno $\binom{4}{2} = 6$ terne con lui e due cavalieri, dunque le prime sei posizioni possono essere occupate solo da cavalieri. Ripetendo questo ragionamento si ricava che i furfanti devono stare dopo la posizione $\binom{6}{2} = 15$, e poi dopo la posizione $\binom{15}{2} = 105$ e infine che i furfanti possono occupare solo le posizioni successive a $\binom{105}{2} > 2021$; avremmo dunque una configurazione di tutti cavalieri, che come detto all'inizio è impossibile.

   In conclusione, i valori possibili per il numero di furfanti sono solo 2021, 2019 e 2018.

7. La risposta è **(B)**.



I triangoli BAC, HBC, HAB sono simili, dunque ci forniscono le uguaglianze

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{CH} = \frac{AH}{BH}.$$

Le rette DH e AB sono parallele, perché entrambe perpendicolari ad BC; per Talete e il teorema della bisettrice, abbiamo che

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

Ora possiamo mettere assieme tutte le nostre osservazioni per ottenere una relazione tra i lati del triangolo:

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{AH}{BH} = \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC},$$

che riscriviamo come $AC/BC = BC/AB$. Sostituendo questo nel teorema di Pitagora

$$1 = \frac{AC^2}{BC^2} - \frac{AB^2}{BC^2} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 - \left(\frac{AB}{BC}\right)^2.$$

Il rapporto che stiamo cercando è dunque la soluzione positiva di $x^2 + x - 1$.

8. La risposta è **(C)**. Sia T la prima operazione e $B_1, \ldots, B_6$ le altre sei in modo che B_i agisce sui numeri in posizione i,$i+1$,$i+2$.

   Osserviamo che tutte le operazioni commutano tra di loro, e che applicare un'operazione due volte è come non applicarla. Quindi possiamo associare ad ogni operazione un bottone ON/OFF (che corrisponde ad aver fatto o non aver fatto data operazione) e a ogni successione di operazioni uno e un solo stato dei bottoni.

   Le combinazioni ottenibili sono allora al più quante tutti i possibili stati dei bottoni, che sono 2^7.

   Supponiamo ora per assurdo che ci siano due stati diversi che portano le 8 celle a contenere gli stessi numeri. Questo vuol dire che esiste uno stato di bottoni (non tutti su OFF) il cui risultato è trasformare la combinazione 00000000 in se stessa.

   Supponiamo che l'operazione T sia stata effettuata. Allora necessariamente sono state fatte anche B_1 e B_6 (per poter avere la prima e ultima cella a 0). Questo vuol dire che B_2 e B_5 sono su OFF, altrimenti la seconda e la penultima cella avrebbero un 1; per lo stesso motivo anche B_3 e B_4 sono OFF, ma questo vorrebbe dire che le celle 4 e 5 contengono un 1, che è impossibile.

   Dunque l'operazione T non è stata fatta, perciò nemmeno B_1 e B_6, altrimenti le celle esterne avrebbero un 1. Ma allora anche B_2 e B_5 sono OFF; analogamente anche B_3 e B_4 non devono essere state fatte, che è assurdo perché avevamo supposto che fosse stata effettuata almeno una operazione.

   Pertanto a ogni stato dei bottoni corrisponde una diversa combinazione, perciò le combinazioni raggiungibili sono esattamente 2^7.

9. La risposta è **(E)**. Poniamo $n = \lfloor p \rfloor$ e $\alpha = \{p\}$. Allora l'equazione si riscrive come $\{n(n+\alpha)\} = 2021\alpha$, ovvero

   $$\{n\alpha\} = 2021\alpha$$

   Poiché a sinistra abbiamo una parte frazionaria, che è < 1, ed inoltre p non è intero, otteniamo le condizioni $0 \neq \alpha < \frac{1}{2021}$.

   Dall'equazione inoltre ricaviamo che esiste m intero non negativo tale che $n\alpha = m + 2021\alpha$. Riarrangiando, $(n - 2021)\alpha = m$.

   Ora, se $m = 0$ si ha $n = 2021$ che è una soluzione (si verifica che $p = 2021 + \alpha$ funziona per ogni $\alpha < \frac{1}{2021}$), ed è anche la più piccola.

   Se $m \geq 1$, si ha $\alpha = \frac{m}{n-2021} < \frac{1}{2021}$, da cui $n > 2021 + 2021m \geq 4042$, e quindi $n \geq 4043$. In effetti si verifica che $p = 4043 + \frac{1}{2022}$ è soluzione.

10. La risposta è **(E)**. Iniziamo osservando che vale l'identità algebrica

    $$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

    Ponendo $x = 2^a, y = 2^b, z = 2^c$, la condizione $x+y+z \mid x^3+y^3+z^3$ è equivalente a $x+y+z \mid 3xyz$; in particolare, vogliamo cercare le terne (a,b,c) tali che $2^a + 2^b + 2^c \mid 3 \cdot 2^{a+b+c}$.

    Se supponiamo $a \leq b \leq c$, semplificando un 2^a ricaviamo che $1 + 2^{b-a} + 2^{c-a} \mid 3 \cdot 2^{b+c}$. Se fosse $b > a$, a sinistra avrei un numero dispari ≥ 5, mentre a destra un numero la cui parte dispari è 3, il che è impossibile. Dunque vale $b = a$ e dobbiamo trovare le soluzioni di $2 + 2^{c-a} \mid 3 \cdot 2^{c+a}$.

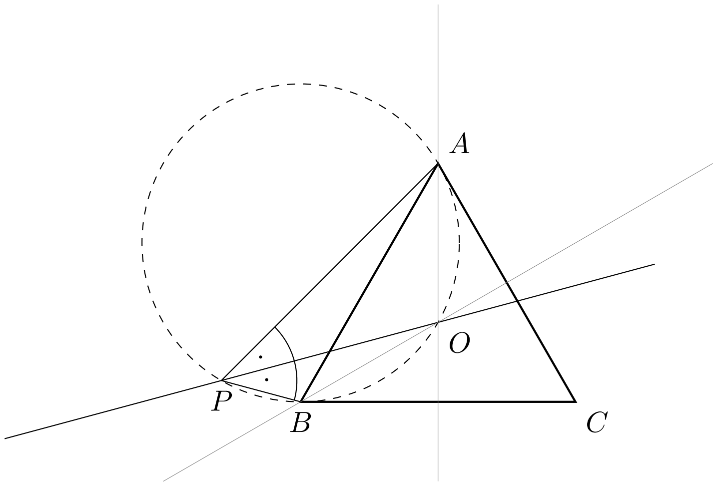
    A questo punto dividiamo in quattro casi

    - Se $c = a$, $2 + 1 \mid 3 \cdot 2^{2a}$ è sempre soddisfatta, quindi abbiamo tutte le terne del tipo (a,a,a) con $0 \leq a \leq 13$ (dato che $2^{13} < 10000 < 2^{14}$), che sono 14.

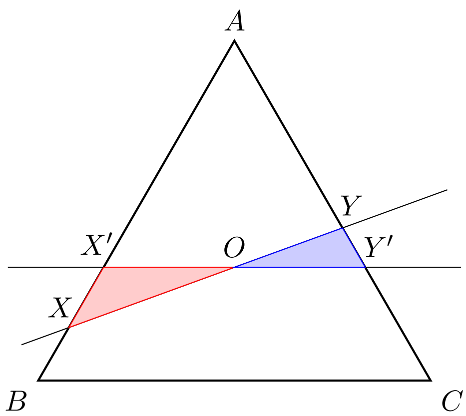
- Se $c = a+1$, possiamo riscrivere la condizione come $2+2 \mid 3 \cdot 2^{2a+1}$, che è verificata per $a \geq 1$ e da cui otteniamo le terne $(a,a,a+1)$ e loro permutazioni; dunque questo caso in totale ha $3 \cdot 12$ soluzioni (poiché deve essere anche $a+1 \leq 13$)
- Se $c = a+2$, la condizione diventa $2+4 \mid 3 \cdot 2^{2a+2}$, che è verificata per $a \geq 0$. Otteniamo dunque le terne $(a,a,a+2)$ e loro permutazioni, che sono valide fino a $a+2 \leq 13$, dunque $3 \cdot 12$ soluzioni anche in questo caso.
- Se $c \geq a+3$, detto $d = c-a-1$ abbiamo $1+2^d \mid 3 \cdot 2^{2a+d}$. Dato che $d \geq 2$, il numero a sinistra è dispari e ≥ 5, quindi non ci sono soluzioni.

Il numero totale di terne ordinate è quindi $14+36+36 = 86$.

11. La risposta è **(A)**.



Sia O il centro del triangolo. Il punto P giace per ipotesi sull'arco della circonferenza circoscritta ad AOB esterno al triangolo. La bisettrice dell'angolo $A\hat{P}B$ passa per il punto medio dell'arco AB opposto a quello sui cui giace, che è proprio O.



Al variare delle rette che passano per O e che intersecano i segmenti AB e AC rispettivamente in X e Y, quella per cui l'area del triangolo AXY è minima è quella parallela a BC. Chiamiamo X' e Y' le intersezioni relative a quest'ultima e supponiamo, per simmetria, che $BX < BX'$: vogliamo mostrare che

$$0 < [AXY] - [AX'Y'] = [OX'X] - [OY'Y].$$

Poiché questi due triangolini hanno l'angolo in O uguale e $OX' = OY'$, è sufficiente osservare che $OX > OX' = OY' > OY$.

Il minimo valore possibile per l'area del triangolo AXY è dunque

$$\frac{4}{9} \cdot [ABC] = \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

In alternativa. Supponiamo di fissare un sistema cartesiano con origine in O. I punti X e Y dipendono linearmente dal coefficiente angolare della retta per O, dunque l'area di AXY dipende quadraticamente da questo parametro: pertanto il minimo può trovarsi solamente al vertice della parabola, che per simmetria deve corrispondere alla retta parallela a BC, oppure agli estremi, uno dei quali corrisponde all'altezza per B. Nel primo caso l'area è $4/9$ quella di ABC, nell'altro la metà.

12. La risposta è **(C)**. Osserviamo che se esiste una soluzione con $a < b < c < d < e < f$, allora questa contribuisce con 6! sestuple ordinate di soluzioni, quindi possiamo ignorarla dato che stiamo contando il numero di soluzioni modulo 6.

    Analogamente per ogni partizione $m_1 + \cdots + m_k = 6$ con $m_i \geq 1$ possiamo considerare le soluzioni in cui ci sono m_i coordinate uguali a x_i, ovvero $\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^3 = 168$. Ogni k-upla di x_i aggiunge al totale delle sestuple ordinate di soluzione la quantità $\dfrac{6!}{m_1! \cdots m_k!}$.

    Siamo pertanto interessati alle partizioni per cui il numero precedente non è multiplo di 6; elencando rapidamente le partizioni di 6 si vede che le uniche che dobbiamo contare sono le soluzioni del tipo (4,2), (3,3) e (6).

    - Tipo (6), ovvero un solo addendo con molteplicità 6; bisogna allora risolvere $6a^3 = 168$, cioè $a^3 = 28$, che non ha nessuna soluzione.
    - Tipo (3,3); vogliamo allora risolvere $3a^3 + 3b^3 = 168$, ovvero $a^3 + b^3 = 56$. Fattorizzando si ha $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 56$; per ogni divisore con segno $d \mid 56$, risolviamo per sostituzione il sistema di secondo grado

      $$\begin{cases} a + b = d \\ a^2 - ab + b^2 = \frac{56}{d} \end{cases}$$

      L'unica soluzione è $(4, -2)$, dunque aggiungiamo $\frac{6!}{3!3!} = 20 \equiv 2 \pmod 6$ al totale.
    - Tipo (4,2); vogliamo allora risolvere $4a^3 + 2b^3 = 168$, ovvero $2a^3 + b^3 = 84$. Si vede che b deve essere pari, dunque $b = 2c$, cioè $2a^3 + 8c^3 = 84$; dividendo per 2 si ottiene $a^3 + 4c^3 = 42$. Allora anche a deve essere pari, sostituiamo $a = 2d$ e arriviamo a $8d^3 + 4c^3 = 42$ che è impossibile perché dividendo per 2 si avrebbe $4d^3 + 2c^3 = 21$.

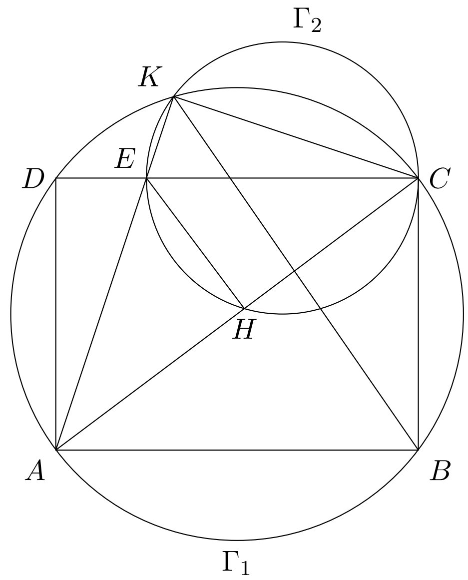
    La risposta è dunque 2, data da tutte le permutazioni della sestupla $(4,4,4,-2,-2,-2)$.

13. La risposta è **12**. I numeri positivi a una cifra con la proprietà speculare sono i quadrati perfetti fra 1 e 9, cioè 1, 4 e 9. Non vi sono numeri di due cifre con la proprietà speculare: i quadrati perfetti di due cifre hanno per radice quadrata un numero a una cifra, il che implica che godrebbero della proprietà speculare solo se le loro due cifre fossero uguali; ma un quadrato con esattamente due cifre uguali è divisibile per 11, quindi per 121, e dunque non esiste. Quanto ai numeri di 3 cifre ABC con la proprietà speculare, bisogna che siano quadrati di un certo numero XY di due cifre e che il numero $100C + 10B + A$ sia il quadrato di $10Y + X$. Un numero di due cifre maggiore di 31 ha per quadrato un numero maggiore di 1000, quindi sia $10X + Y$ che $10Y + X$ devono valere al più 31. Ne consegue che sia X che Y valgano al più 3 e che, se una delle due cifre è uguale a 3, l'altra sia 0 o 1. Le sole possibilità da considerare per la radice quadrata di ABC sono dunque 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, che producono i seguenti quadrati con la proprietà speculare: 100, 121, 144, 169, 400, 441, 484, 900, 961. Abbiamo quindi in totale 12 numeri di al più 3 cifre con la proprietà speculare.

14. La risposta è **3**. In generale, se a un certo punto la cavalletta si trova in (a,b), al passo precedente si trovava in un punto (x,y) tale che $(a,b) = (x+y,y)$ o $(a,b) = (x,x+y)$, cioè in $(a-b,b)$ o in $(a,b-a)$; inoltre, se essa è partita da un punto (x_0,y_0) a coordinate positive, come il testo ci

assicura, allora in ogni momento si trova in un punto a coordinate positive, e quindi la posizione precedente ad (a,b) è univocamente determinata ed è $(a-b,b)$ se $a>b$, $(a,b-a)$ se $b>a$. Ne segue che le posizioni della cavalletta precedenti a $(2021,2050)$, andando a ritroso, sono: $(2021,2050-2021)=(2021,29)$, $(2021-29,29)$, $(2021-2\cdot 29,29)$, $\dots$, $(2021-69\cdot 29,29)=(20,29)$, $(20,29-20)=(20,9)$. La cavalletta potrebbe essere quindi partita da $(20,9)$; se non lo ha fatto, può aver effettuato un ulteriore salto ed essere partita da $(20-9,9)=(11,9)$ o due ulteriori salti ed essere partita da $(11-9,9)=(2,9)$. Se la cavalletta avesse fatto ancora più salti, sarebbe partita da un punto la cui seconda coordinata è al più 7, che non soddisfa le condizioni del testo. Vi sono quindi 3 possibilità per (x_0,y_0).

15. Affrontiamo in sequenza i punti.



(a) La diagonale AC è diametro della circonferenza Γ_1 circoscritta al rettangolo $ABCD$. L'angolo $\widehat{CKA}$ è retto per costruzione e la circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo CKA ha AC come diametro. Quindi le due circonferenze sono le stesse, cioè K appartiene alla circonferenza circoscritta al rettangolo $ABCD$.

Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero (non intrecciato) sia ciclico è che angoli opposti siano supplementari. Nel quadrilatero $CKEH$ gli angoli opposti $\widehat{CKE}$ e $\widehat{EHC}$ sono entrambi retti per costruzione e, dunque, supplementari. Il quadrilatero $CKEH$ è quindi inscritto in una circonferenza, che chiamiamo Γ_2.

(b) Abbiamo $\widehat{CKB}=\widehat{CAB}$ perché insistenti sullo stesso arco di Γ_1; allo stesso tempo, $\widehat{CKH}=\widehat{CEH}$ perché insistenti sullo stesso arco di Γ_2. Ma $\widehat{CEH}=90°-\widehat{HCE}=\widehat{ACB}$ considerando la somma degli angoli interni del triangolo rettangolo EHC e il fatto che $\widehat{DCB}$ sia retto. Perciò $\widehat{CKB}+\widehat{CKH}=\widehat{CAB}+\widehat{ACB}=90°$ perché il triangolo ABC è rettangolo.

(c) Chiaramente, i punti H e B si trovano dalla parte opposta della retta DC rispetto al punto K; ne segue che K,B,H sono allineati se e solo se $\widehat{CKH}=\widehat{CKB}$. Ma abbiamo dimostrato che $\widehat{CKH}+\widehat{CKB}=90°$, quindi l'allineamento è equivalente al fatto che si abbia $\widehat{CKH}=\widehat{CKB}=45°$, che a sua volta equivale a $\widehat{CAB}=\widehat{ACB}=45°$ per le identità di angoli trovate. Ma questo è equivalente al fatto che il triangolo ABC sia rettangolo isoscele su base AC, cioè che $ABCD$ sia un quadrato.

16. (a) Se possiamo scrivere x_n nella forma $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ con p_n e q_n interi coprimi, allora anche x_{n+1} potrà essere scritto nella stessa forma. Infatti se definiamo il numero intero k come $k=-\left\lfloor 1-\frac{1}{x_n}\right\rfloor$ (dove $\lfloor x\rfloor$ indica il più grande numero intero minore o uguale ad x), abbiamo $x_{n+1}=1-\frac{1}{x_n}+k=\frac{(1+k)p_n-q_n}{p_n}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ con p_{n+1} e q_{n+1} coprimi.

In particolare $q_{n+1}\le p_n$ e il minore è stretto qualora p_n non sia coprimo con $(1+k)p_n-q_n$.

Ora, dato che per $n \geq 1$ si ha che $0 \leq x_n < 1$, necessariamente $q_n > p_n \geq q_{n+1}$. Pertanto la sequenza di numeri interi positivi q_m è strettamente decrescente, dunque non può essere infinita.

Nota. La frazione $\frac{(1+k)p_n - q_n}{p_n}$ è in effetti già ridotta ai minimi termini: si ha infatti $\mathrm{MCD}(p_n,(1+k)p_n - q_n) = \mathrm{MCD}(p_n,q_n) = 1$, dove la prima uguaglianza segue dalla ben nota proprietà $(a+kb,b) = (a,b)$.

(b) La successione si interrompe precisamente quando un certo elemento x_n è uguale a 0. Data la formula che definisce la successione, $x_n = \{1 - \frac{1}{x_{n-1}}\}$, questo ci dice che $1 - \frac{1}{x_{n-1}}$ è un numero intero, diciamo m, e quindi che $x_{n-1} = \frac{1}{1-m}$ è un numero razionale. Possiamo ora procedere a ritroso: se un certo termine x_h è razionale, allora dalla formula $x_h = \{1 - \frac{1}{x_{h-1}}\}$ otteniamo che esiste un intero m_h tale che $x_h = 1 - \frac{1}{x_{h-1}} - m_h$, da cui $x_{h-1} = \frac{1}{1-m_h-x_h}$ è anch'esso un numero razionale. Procedendo in tal modo si ottiene (per induzione) che anche x_0 è razionale, come voluto.

Soluzione alternativa. Dimostrare che se $x_0 > 0$ ha sequenza finita, allora è un *razionale* (cioè $x_0 = \frac{p}{q}$ per opportuni p,q interi) equivale a dimostrare che se $x_0 > 0$ non è razionale, allora la sua sequenza è infinita.

Mostriamo che se x_n non è razionale, allora non lo è neanche x_{n+1}; infatti, se esistessero $p,q \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{p}{q} = x_{n+1} = \left\{1 - \frac{1}{x_n}\right\}$, avremmo $x_n = \frac{q}{(1+k)q-p}$ (con k come nella prima parte della dimostrazione dell'esercizio), cioè x_n sarebbe razionale contrariamente all'ipotesi.

Quindi, per induzione, se $x_0 > 0$ non è razionale, nessun termine della sequenza è razionale, quindi in particolare 0 non può comparire nella sequenza.

17. Fissiamo un intero positivo n e consideriamo una casella, numerata C, che si trovi al di fuori del quadrato centrato sulla casella 1 di lato $2n-1$ caselle, ma che abbia almeno un vertice in comune col perimetro di tale quadrato. Per via della numerazione a spirale, le caselle all'interno del quadrato sono numerate da 1 a $(2n-1)^2$, e quelle esterne che hanno almeno un vertice in comune con il perimetro del quadrato sono numerate fino a $(2n+1)^2$, quindi abbiamo necessariamente $(2n-1)^2 < C \leq (2n+1)^2$. Sia $S(C)$ la somma delle cifre di C; affinché la casella numerata C contenga un forziere, bisogna che sia raggiungibile dalla casella 1 tramite al più $S(C)$ passi. D'altra parte, sono necessari almeno n passi per uscire dal quadrato $(2n-1) \times (2n-1)$ centrato in 1, e quindi affinché la casella contenga un forziere è necessario che si abbia $S(C) \geq n$. Ma $S(C) \leq 9 \cdot$(numero di cifre di C) $\leq 9 \cdot$(numero di cifre di $(2n+1)^2$) $\leq 18 \cdot$(numero di cifre di $2n+1$) $\leq 18 \cdot (1 +$ (numero di cifre di n)), mentre $n \geq 10^{(\text{numero di cifre di } n)-1}$.

Dimostriamo che, se n ha almeno 3 cifre, allora C non può contenere un forziere. In effetti, dato $k \geq 3$, si ha $S(C) \leq 18(k+1) < 10^{k-1} \leq n$, che contraddice la condizione richiesta. In effetti, $18 \cdot 4 = 72 < 100$ e, se si ha $18(k+1) < 10^{k-1}$ e $k \geq 3$, allora $18(k+2) = 18(k+1) + 18 < 10^{k-1} + 18 < 2 \cdot 10^{k-1} < 10^k$, quindi la disuguaglianza vale per ogni $k \geq 3$.

In conclusione, nessuna casella numerata C con $C > (2 \cdot 100 - 1)^2$ contiene un forziere, perché si trova appena fuori da un quadrato centrato in 1 di lato $2n-1$ per qualche n con almeno tre cifre.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Si assegnino non più di **3 punti** (uno per ciascuno dei punti (a), (b) e (c)) a una soluzione corretta ma con una scelta specifica del punto E in un rettangolo qualsiasi (ad esempio $E = D$). Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **4 punti**. Di questi, **2 punti** per la dimostrazione che K appartiene alla circonferenza Γ_1 e **2 punti** per quella che $CKEH$ è un quadrilatero ciclico.
- Il punto (b) vale **6 punti**. Si assegnino tutti i punti anche a chi dimostri il punto (b) usando il punto (a), senza essere riuscito a dimostrare quest'ultimo. Per soluzioni parziali, si assegnino **2 punti** a chi osservi $\widehat{CKB} = \widehat{CAB}$, **2 punti** a chi osservi che $\widehat{CKH} = \widehat{CEH}$, **2 punti** a chi dimostri che $\widehat{CEH} = \widehat{ACB}$. Per chi dimostri tutte e tre le uguaglianze ma non arrivi a concludere, si assegnino **5 punti** anziché 6.
- Il punto (c) vale **5 punti**; si assegnino tutti i punti anche a chi dimostri il punto (c) usando i punti (a) e (b), senza essere riuscito a dimostrarli. Si assegnino **3 punti** a chi dimostri solo una delle due implicazioni.

Si assegni inoltre **1 punto** addizionale se la soluzione riporta una figura costruita in modo corretto, purché questo non conduca un concorrente con una soluzione incompleta ad ottenere 15 punti.
Non si detraggano punti dalla soluzione se il concorrente tralascia di escludere la possibilità che l'allineamento di K, H, B avvenga con $\widehat{CKH} = 180° - \widehat{CKB}$.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **8 punti**. Si assegnino fino a **5 punti** a chi dichiari che la sequenza dei denominatori è strettamente decrescente (e ne tragga la conclusione) senza giustificare tale decrescenza stretta. Non si assegni più di **1 punto** a chi proponesse esempi senza un'argomentazione generale.
- Il punto (b) vale **7 punti**. A chi scelga l'impostazione della soluzione alternativa si assegnino **2 punti** per la formulazione equivalente del problema in termini di numeri irrazionali.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- **5 punti** a chi osservi che condizione necessaria affinché una casella C contenga parte del tesoro è che essa sia raggiungibile dalla casella 1 con un numero di passi non superiore alla somma delle cifre di C.
- **4 punti** a chi consideri una condizione analoga a 'se C è appena al di fuori del quadrato $(2n-1) \times (2n-1)$, allora $(2n-1)^2 < C \leq (2n+1)^2$'. Si assegnino fino a **2 punti** in caso il quadrato considerato non sia quello più grande possibile fra quelli con centro nella casella 1 e non contenenti C.

  Si osservi che lo scopo di questo punto è quello di fornire una stima dal basso sulla distanza fra le caselle 1 e C: i punti saranno quindi da assegnare anche per la dimostrazione di qualsiasi disuguaglianza con il medesimo contenuto, ad esempio 'la distanza fra la casella 1 e la casella C è almeno $\frac{\sqrt{C}-1}{2}$'. Si consideri la possibilità di assegnare questi punti anche in presenza di stime analoghe, anche se diverse, purché corrette e dimostrate.
- **2 punti** a chi stimi la somma delle cifre di C con 9 volte il numero delle sue cifre.

- **2 punti** per chi affermi che il confronto fra le due stime lascia solo un numero finito di possibilità per i valori di C corrispondenti a caselle contenenti parte del tesoro.
- **2 punti** per chi argomenti correttamente l'affermazione precedente, ad esempio osservando che una funzione a crescita esponenziale è maggiore di una a crescita polinomiale, almeno da un certo punto in poi.