Unione Matematica Italiana
Ministero dell'Istruzione

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio

16 febbraio 2022

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Viale Marconi è lungo 800m; a 200m da un estremo c'è un parchimetro, a 100m dall'estremo opposto c'è un negozio di vestiti. Astolfo vuole parcheggiare la sua macchina, prendere un biglietto al parchimetro, tornare alla macchina per esporlo sul parabrezza, visitare il negozio e infine ritornare alla macchina. Inoltre è pigro e quindi vuole camminare il meno possibile; dove deve parcheggiare per farlo? Indicare l'insieme dei punti del viale che minimizzano la distanza che Astolfo deve percorrere a piedi.

   (A) Il punto davanti al parchimetro **(B)** Il punto davanti al negozio **(C)** Il punto medio tra il parchimetro e il negozio **(D)** Tutti i punti del viale **(E)** Tutti i punti del tratto di viale compreso tra il parchimetro e il negozio.

2. Il risultato della divisione di 57 per 111 è un numero della forma $0,\ldots$ con infinite cifre dopo la virgola. Quanto vale la somma delle prime 2022 cifre dopo la virgola?

   (A) 3033 **(B)** 4044 **(C)** 5055 **(D)** 6066 **(E)** 7077

3. Tre circonferenze di raggio unitario sono tangenti tra loro e una quarta circonferenza è tangente a tutte e tre, e non le racchiude. Quanto vale il raggio della quarta circonferenza?

   (A) $\frac{\sqrt{3}+1}{24}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

4. Il polinomio $p(x)$ ha la seguente proprietà: per ogni terna di interi a, b, c tali che $a+b+c=2022$ si ha che $p(a)+p(b)+p(c)=p(674)$. Si sa inoltre che $p(0)=-2696$. Quanto vale $p(2022)$?

   (A) -2696 **(B)** 674 **(C)** 5392 **(D)** 8088 **(E)** Non è possibile determinarlo con i dati forniti.

5. Lucia vuole scrivere tre interi positivi a, b, c in modo che ognuno di essi sia un divisore di 30 e che i massimi comuni divisori fra due termini consecutivi (cioè $\mathrm{MCD}(a,b)$ e $\mathrm{MCD}(b,c)$) siano numeri primi. In quanti modi può farlo?

   (A) 69 **(B)** 72 **(C)** 105 **(D)** 2^7 **(E)** Nessuna delle precedenti.

6. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB=AC$. L'altezza uscente da A misura 15 mentre l'altezza uscente da B misura 24. Quanto vale l'area di ABC?

   (A) 180 **(B)** 300 **(C)** $240\sqrt{2}$ **(D)** $200\sqrt{3}$ **(E)** 320

7. Alla lavagna è scritta la moltiplicazione $x \times y$, dove x e y sono numeri interi positivi di tre cifre. Nicolò, un po' sbadato, non ha notato il simbolo di moltiplicazione e ricopia sul suo quaderno il numero di sei cifre ottenuto giustapponendo x e y. L'insegnante, passando fra i banchi, fa notare a Nicolò che il numero da lui scritto è uguale a 7 volte il prodotto xy. Quanto vale la somma $x+y$?

   (A) 125 **(B)** 286 **(C)** 312 **(D)** 487 **(E)** 513

8. In una partita di *palla Riemanniana* si affrontano due squadre; in ogni momento, ciascuna schiera in campo $k>1$ giocatrici. Alla fine di ogni azione viene assegnato un punto a una delle due squadre; inoltre, ciascuna squadra può effettuare un numero arbitrario di sostituzioni prima che abbia inizio l'azione successiva. Alice e Barbara fanno parte della squadra delle *Geodetiche*. Alla fine della partita di oggi, Alice osserva che, mentre lei era in campo, le *Geodetiche* hanno vinto

7 azioni in più di quante ne abbiano perse. Quando Barbara era in campo, invece, hanno perso 2 azioni in più di quante ne abbiano vinte. Ciascuna delle altre giocatrici delle *Geodetiche* ha partecipato a tante azioni vincenti quante perdenti. Quanto vale k?

(A) 3 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 9 **(E)** I dati non sono sufficienti per determinarlo.

9. Poniamo $a_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}).$$

Qual è il più piccolo valore di n per cui a_n è divisibile per 2022?

(A) 47 **(B)** 289 **(C)** 337 **(D)** 2022 **(E)** 2023

10. Maddalena scrive su un foglio tutte le potenze di 2 da 1 a 2^{100} (estremi inclusi). Quanti dei numeri che ha scritto iniziano per 1?

(A) 28 o meno **(B)** 29 **(C)** 30 **(D)** 31 **(E)** 32 o più.

11. I πcchi sono animali che vivono in famiglie di 1, 2 o 3 individui. Originariamente fu importata in Italia una famiglia di 3 πcchi. Una famiglia di n πcchi si riproduce crescendo di $2n-2$ nuovi individui, formando un totale di $3n-2$, e dividendosi in nuove famiglie (non necessariamente due famiglie con lo stesso numero di individui si dividono allo stesso modo). Tutte le famiglie si riproducono contemporaneamente ad ogni nidiata. Per esempio, dopo la prima nidiata ci sono per forza sette πcchi, che potrebbero essere divisi in tre famiglie di due e una di uno, o in una di tre e due di due, o in sette di uno, eccetera. Quante sono le possibilità per il numero totale di πcchi dopo la settima nidiata?

(A) 129 **(B)** 253 **(C)** 2^7 **(D)** $\frac{2^7+3^7+1}{2}$ **(E)** 3^7

12. Sia dato un esagono regolare di lato 1. Consideriamo un triangolo equilatero di lato 1 dentro all'esagono, con due vertici vincolati al perimetro dell'esagono. Muoviamo il triangolo equilatero in modo che uno dei due vertici vincolati compia esattamente un giro lungo il perimetro dell'esagono. Quant'è la lunghezza percorsa dal vertice non vincolato?

(A) $\pi/2$ **(B)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $8\sqrt{3}-12$ **(D)** $(4\sqrt{3}-6)\pi$ **(E)** Nessuna delle precedenti.

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Lucio compra un tavolo a forma di esagono regolare e una tovaglia rettangolare di area $1024\,\text{cm}^2$ che ha lato minore pari al lato dell'esagono e copre esattamente la porzione di tavolo compresa fra due lati opposti. Quanto vale l'area del tavolo, espressa in cm^2?

14. Quanti sono gli interi positivi n per cui $\left(2022+\frac{1}{2}\right)^n + \left(25+\frac{1}{2}\right)^n$ è un numero intero?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Un numero di tre cifre, diverse fra loro e non nulle (diciamo abc), si dice *petaloso* se esiste un intero $n \geq 1$ tale che il numero $cba\underbrace{00\cdots0}_{n \text{ zeri}}$ sia multiplo di abc. Il più piccolo n che rende vera questa divisibilità è detto *fiore* di abc.

Esempio. Il numero 132 è petaloso, in quanto 132 divide 23100. Siccome $23100/132 = 175$ è intero ma $2310/132 = 17{,}5$ non lo è, il fiore di 132 è 2.

(a) Sia abc un numero di tre cifre (diverse fra loro e non nulle) della forma $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ con x, y, z interi non negativi e $y \leq 2$. Dimostrare che abc è petaloso.

(b) Quanto vale al massimo il fiore di un numero petaloso (di tre cifre)?

(c) Sia abc un numero petaloso. Dimostrare che abc non è divisibile per 13.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo, sia r la bisettrice interna dell'angolo acuto $\widehat{BAC}$ e siano K la proiezione di B su r, L la proiezione di K su AB e D il simmetrico di B rispetto ad L. Chiamiamo infine H il piede dell'altezza del triangolo ABC uscente da B. Dimostrare che:

(a) $BH = 2LK$;

(b) KA biseca l'angolo $\widehat{HKD}$;

(c) il triangolo ADH è isoscele.

SOLUZIONE:

Nome:______________________________Cognome:______________________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Il *primo quadrante* del piano cartesiano è l'insieme dei punti (x, y) con x e y numeri reali strettamente positivi (cioè $x > 0$, $y > 0$). Ciascun punto del primo quadrante è colorato di rosso o di blu. Inoltre, per ogni punto $P = (x, y)$ del primo quadrante, tutti i punti sulla semiretta uscente da P con pendenza y (ovvero la semiretta avente origine in P e passante per il punto di coordinate $(x + 1, 2y)$) hanno lo stesso colore di P. Dimostrare che tutti i punti del primo quadrante hanno lo stesso colore.

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Lorenzo Benedini, Luigi Amedeo Bianchi, Alberto Cagnetta, Andrea Ferretti, Leonardo Franchi, Andrea Gallese, Marco Golla, Alessandro Iraci, Marcello Mamino, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Lorenzo Mazza, Silvia Pagani, Ludovico Pernazza, Federico Poloni, Matteo Protopapa, Lucio Tanzini.

Alessandra Caraceni e Davide Lombardo

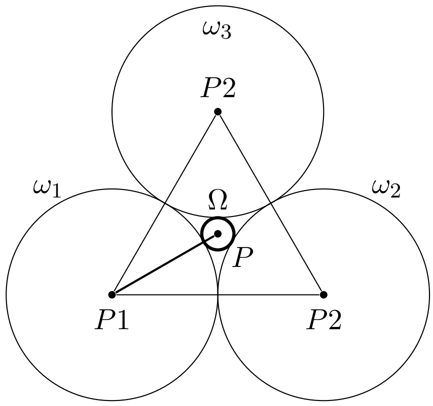
Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(E)**. Notiamo innanzitutto che la distanza fra parchimetro e negozio è di 500 metri. Se Astolfo parcheggia in un punto compreso fra il parchimetro ed il negozio, diciamo a distanza x dal parchimetro (e quindi distanza $500m - x$ dal negozio), allora dovrà percorrere a piedi una distanza totale data da x (per andare al parchimetro) + x (per tornare alla macchina) + $500m - x$ (per raggiungere il negozio) + $500m - x$ (per tornare alla macchina), ovvero $1000m$, indipendentemente da x. Se invece parcheggia fra il parchimetro e l'estremo di Viale Marconi ad esso più vicino, diciamo a distanza $y > 0$ dal parchimetro, allora dovrà percorrere a piedi una distanza data da y (per andare al parchimetro) + y (per tornare alla macchina) + y (per tornare nuovamente al parchimetro) + $500m$ (per raggiungere il negozio) + $500m$ (per tornare al parchimetro) + y (per tornare alla macchina), per un totale di $1000m + 4y > 1000m$. Infine, se parcheggia fra il negozio e l'estremo di Viale Marconi ad esso più vicino, a distanza $z > 0$ dal negozio, il tratto che dovrà percorrere a piedi sarà di lunghezza

$$z + 500m + 500m + z + z + z = 1000m + 4z > 1000m,$$

dove i vari addendi corrispondono ai tratti per andare dalla macchina al negozio, dal negozio al parchimetro, tornare dal parchimetro al negozio, tornare dal negozio alla macchina, e infine tornare ancora dalla macchina al negozio e viceversa. Si vede quindi che la distanza minima che Astolfo è costretto a percorrere a piedi è di $1000m$, e che essa è realizzata da tutti e soli i punti del tratto compreso fra il parchimetro e il negozio.

2. La risposta è **(D)**.
Si ha $\frac{57}{111} = \frac{57\cdot 9}{111\cdot 9} = \frac{513}{999}$. Come noto, una frazione $\frac{a}{b}$ con denominatore della forma $b = \underbrace{9\dots 9}_{k \text{ cifre nove}}$ ha uno sviluppo decimale periodico, con periodo di lunghezza k. Inoltre, se il numeratore è inferiore al denominatore, allora il numeratore fornisce esattamente le cifre del periodo. Si ottiene allora
$$\frac{57}{111} = \frac{513}{999} = 0.513513513\dots$$
e quindi ogni gruppo di tre cifre consecutive ha somma $5 + 1 + 3 = 9$. Dal momento che 2022 cifre corrispondono a $2022/3$ gruppi di 3 cifre, la risposta è $\frac{2022}{3} \cdot 9 = 6066$.
Nota. Naturalmente il risultato della divisione si può anche ottenere per calcolo diretto.



3. La risposta è **(D)**. Chiamiamo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le prime tre circonferenze e Ω la quarta, e siano P_1, P_2, P_3, P i loro rispettivi centri. Il triangolo $P_1P_2P_3$ è evidentemente equilatero (ognuno dei suoi lati è pari al doppio del raggio delle circonferenze $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, cioè è uguale a 2). Il punto P è equidistante da P_1, P_2, P_3, e quindi è il circocentro di $P_1P_2P_3$. La distanza PP_1 è allora uguale al raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero di lato 2. Siccome in un triangolo equilatero il circocentro coincide con il baricentro, e il baricentro taglia ogni mediana in rapporto $1 : 2$, abbiamo che PP_1 è anche pari a $2/3$ della mediana (o equivalentemente, l'altezza) uscente da P_1. Dal momento che l'angolo in P_2 è di $60°$, la lunghezza di tale altezza può essere calcolata come $\frac{\sqrt{3}}{2}P_1P_2 = \sqrt{3}$. Otteniamo perciò che la lunghezza PP_1 è $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Tale

lunghezza però è anche uguale alla somma dei raggi di ω_1 e Ω, per cui per differenza otteniamo che il raggio di Ω è $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$.

4. La risposta è **(C)**. Sostituendo $a = b = c = 674$ (interi che effettivamente soddisfano $a+b+c = 2022$) si ottiene $3p(674) = p(674)$, ovvero $p(674) = 0$. Sostituendo allora $a = b = 0$ e $c = 2022$ otteniamo
$$2p(0) + p(2022) = p(674) = 0 \Rightarrow p(2022) = -2p(0) = 5392.$$

5. La risposta è **(C)**. Distinguiamo diversi casi, a seconda del numero di fattori primi di b:

   (a) se b ha 0 fattori primi, allora $b = 1$, e qualunque sia il valore di a si ha $(a,b) = 1$, che non è un numero primo.

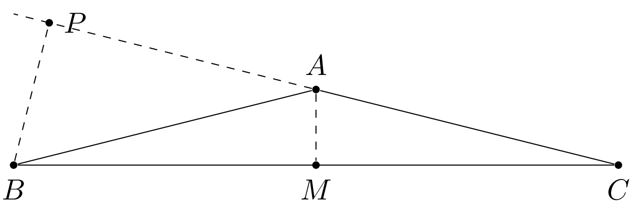
   (b) se b ha esattamente un fattore primo, cioè è esso stesso primo, allora la condizione che (a, b) e (b, c) siano primi vuol dire che entrambi devono coincidere con b. Gli interi a, c possono quindi essere scelti in qualunque modo fra i divisori di $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ che sono multipli di b. È facile verificare che (qualunque sia il valore di b) ci sono 4 scelte per a e 4 scelte per c (ad esempio, se $b = 2$, allora a e c possono essere scelti nell'insieme $\{2, 6, 10, 30\}$). Tenendo conto che $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ha esattamente 3 fattori primi distinti (e quindi ci sono 3 scelte per b in questo caso), abbiamo $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ possibili scelte per la terna (a, b, c).

   (c) se b ha esattamente 2 fattori primi, diciamo $b = pq$, allora posto $r = 30/b$ si vede facilmente che la condizione che (a, b) e (a, c) siano numeri primi è equivalente al fatto che gli interi a, c appartengano all'insieme $\{p, q, pr, qr\}$. Osserviamo che scegliere b è equivalente a scegliere il primo $r \in \{2, 3, 5\}$, per cui in questo caso abbiamo 3 scelte per b e 4 scelte per ognuno fra a e c, per un totale di $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ scelte possibili.

   (d) infine, se b ha esattamente 3 fattori primi, allora si ha $b = 30$. Siccome per ipotesi a e c dividono 30 si ha $(a, b) = a$ e $(b, c) = c$, per cui dobbiamo scegliere sia a che c nell'insieme $\{2, 3, 5\}$. Abbiamo allora $3 \cdot 3 = 9$ scelte per la terna $(a, b, c) = (a, 30, c)$.

   In totale, il numero di terne (a, b, c) che rispettano le proprietà volute è $48 + 48 + 9 = 105$.

6. La risposta è **(B)**. Sia M il punto medio del lato BC, che è anche il piede dell'altezza uscente da A (in quanto ABC è isoscele su base BC), e sia P il piede dell'altezza uscente da B. Dal momento che l'altezza uscente da A è più corta di quella uscente da B, l'angolo in A risulta ottuso, per cui il punto P cade fuori dal segmento AC (e si trova dal lato opposto di C rispetto ad A).



   I triangoli MCA e PCB sono simili, in quanto hanno due angoli uguali: infatti gli angoli in M e in P sono retti, e l'angolo in C è in comune. Poniamo $x = PC$ e $y = MB = MC$. Dalla similitudine già osservata si ottiene $MC/AM = PC/BP$, ovvero $\frac{y}{15} = \frac{x}{24}$. Il triangolo BPC è rettangolo in P, per cui il teorema di Pitagora fornisce $PB^2 + PC^2 = BC^2$, cioè
$$24^2 + x^2 = (2y)^2.$$

   Sostituendo $x = \frac{24}{15}y = \frac{8}{5}y$ otteniamo allora
$$24^2 + \frac{64}{25}y^2 = 4y^2 \Rightarrow 24^2 = \frac{36}{25}y^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{24^2 \cdot 5^2}{6^2}} = \frac{24 \cdot 5}{6} = 20.$$

   L'area di ABC è quindi uguale a $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot 15 = 20 \cdot 15 = 300$.

7. La risposta è **(B)**. Le ipotesi del problema si traducono in $1000x+y=7xy$, e possiamo riscrivere questa equazione come $y=\frac{1000x}{7x-1}$. A questo punto possiamo procedere in (almeno) due modi:

   (a) si ha $y=\frac{1000x}{7x-1}\geq\frac{1000x}{7x}=\frac{1000}{7}=142.8\ldots$, e d'altro canto
   $$y=\frac{1000x}{7x-1}=\frac{1000(x-1/7)+1000/7}{7x-1}=\frac{1000}{7}+\frac{1000/7}{7x-1}\leq\frac{1000}{7}+\frac{1000/7}{7\cdot 100-1}<\frac{1000}{7}+1,$$
   per cui y deve essere l'unico intero compreso fra $1000/7$ e $1000/7+1$, ovvero $y=143$. Da questo si ricava immediatamente che $x=\frac{y}{7y-1000}=143$ e quindi $x+y=286$.

   (b) in alternativa, osserviamo che x e $7x-1$ non possono avere fattori primi in comune (in quanto se p divide sia x sia $7x-1$ allora divide anche $(7x-1)-7\cdot x=-1$, ma nessun numero primo divide -1). Il fatto che $7x-1$ divida $1000x$ implica allora che $7x-1$ divida 1000; d'altra parte, per ipotesi x ha 3 cifre, per cui $7x-1\geq 7\cdot 100-1=699$. L'unico divisore di 1000 maggiore o uguale a 699 è 1000 stesso, da cui $7x-1=1000\Rightarrow x=143$ e $y=\frac{1000\cdot x}{7x-1}=x=143$. Ne segue che $x+y=286$.

8. La risposta è **(B)**. Costruiamo una tabella con una riga per ogni azione giocata e una colonna per ogni giocatrice delle *Geodetiche*. Scriviamo $+1$ in una casella se la giocatrice corrispondente alla riga era in campo durante l'azione corrispondente alla colonna e l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*. Similmente, scriviamo -1 in corrispondenza delle coppie (giocatrice, azione) date dalle azioni perse dalle *Geodetiche* con quella giocatrice in campo. Infine, scriviamo 0 nelle caselle corrispondenti a coppie (giocatrice, azione) per cui la giocatrice non era in campo nella corrispondente azione. Consideriamo ora la somma di tutti i numeri nella tabella.

   Per ipotesi sappiamo che la colonna di Alice somma a $+7$, la colonna di Barbara somma a -2, e tutte le altre colonne sommano a 0. La somma di tutti i numeri nella tabella è quindi 5. D'altro canto, ogni riga della tabella ha somma $+k$ (se l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*) o $-k$ (se l'azione è stata persa): infatti su ogni riga ci esattamente k numeri non nulli (corrispondenti alle k giocatrici in campo), e sono o tutti uguali a $+1$, se l'azione è stata vinta dalle *Geodetiche*, o tutti uguali a -1, altrimenti. Detti allora V e P il numero di azioni vinte e il numero di azioni perse dalle *Geodetiche*, abbiamo ottenuto l'equazione $5=k(V-P)$. Da questo segue che k divide 5, e siccome $k>1$ si ha $k=5$.

   Nota. Non è difficile costruire esempi della situazione descritta nel testo: i punteggi considerati sono effettivamente realizzabili.

9. La risposta è **(C)**. Consideriamo le equazioni
   $$\begin{cases} a_n=n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) \\ a_{n+1}=(n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n), \end{cases}$$
   valide per ogni $n\geq 2$. Riscriviamo ora la seconda nella forma
   $$\begin{aligned} a_{n+1}&=n(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+(n+1)a_n \\ &=a_n+\frac{a_n}{n}+(n+1)a_n \\ &=\frac{n^2+2n+1}{n}a_n \\ &=\frac{(n+1)^2}{n}a_n \end{aligned}$$
   dove – usando la prima equazione – abbiamo sostituito dovunque possibile $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ con $\frac{a_n}{n}$. Otteniamo allora
   $$a_n=\frac{n^2}{n-1}a_{n-1}=\frac{n^2}{n-1}\frac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-2}=\cdots=\frac{n^2}{n-1}\frac{(n-1)^2}{n-2}\cdots\frac{3^2}{2}a_2.$$
   Semplificando il denominatore di ogni frazione con il numeratore della successiva e osservando che $a_2=2$ otteniamo
   $$a_n=n^2\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot\frac{3}{2}a_2=n\cdot\frac{n!}{2}$$

per ogni $n \geq 2$. A questo punto, osserviamo che $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ divide $n \cdot \frac{n!}{2}$ se e soltanto se questo numero è divisibile separatamente per $2, 3$ e 337. Da una parte, siccome $n \cdot \frac{n!}{2}$ è un prodotto di numeri minori o uguali ad n e 337 è primo, tale prodotto può essere divisibile per 337 soltanto se $n \geq 337$. D'altra parte, se $n = 337$ abbiamo $a_n = 337 \cdot \frac{1}{2} \cdot 337!$, e $\frac{1}{2} \cdot 337! = 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 337$ è certamente multiplo di 6, per cui $2 \cdot 3 \cdot 337$ divide a_{337}, e quindi 337 è il minimo cercato.

10. La risposta è **(D)**. Iniziamo con un'osservazione più generale. Dato un intero positivo $n \geq 2$, consideriamo la più piccola potenza 2^a di 2 che in base 10 si scriva con almeno n cifre. Siccome 2^{a-1} si scrive con al massimo $n-1$ cifre abbiamo $2^{a-1} \leq 10^{n-1} - 1$, e quindi $10^{n-1} \leq 2^a \leq 2 \cdot 10^{n-1} - 1$, dove la prima disuguaglianza segue dall'ipotesi che 2^a si scriva con almeno n cifre. Le disuguaglianze appena scritte significano esattamente che la scrittura decimale di 2^a inizia con la cifra 1. D'altra parte, la potenza di 2 successiva, ovvero 2^{a+1}, rispetta $2 \cdot 10^{n-1} \leq 2^{a+1} \leq 4 \cdot 10^{n-1} - 2$, e quindi la sua prima cifra decimale è 2 o 3. Da questo segue immediatamente che 2^a è *l'unica* potenza di 2 che in base 10 si scriva con esattamente n cifre e la cui prima cifra sia uguale ad 1. Lo stesso vale ovviamente per le potenze di 2 ad una cifra: l'unica che inizi con 1 è proprio 2^0. Otteniamo quindi che per ogni possibile lunghezza della rappresentazione decimale esiste una ed una sola potenza di 2 la cui rappresentazione decimale abbia quella lunghezza ed inizi per 1.

    Da questo segue che per contare le potenze di 2 volute dobbiamo soltanto capire quante diverse lunghezze assumono i numeri scritti da Maddalena: per ogni lunghezza c'è esattamente una potenza di 2 che inizia con la cifra 1. Siccome 2^0 ha una singola cifra, si tratta di capire quante cifre abbia 2^{100}. Osserviamo che $2^{10} = 1024 > 10^3$, quindi $2^{100} > (10^3)^{10} = 10^{30}$, e quindi 2^{100} ha almeno 31 cifre. Mostriamo ora che 2^{100} ha esattamente 31 cifre, ovvero che $2^{100} < 10^{31}$. Semplificando un fattore 2^{30} da entrambi i lati, la disuguaglianza voluta diventa $2^{70} < 10 \cdot 5^{30}$. Osserviamo ora che $2^7 = 128$ e $5^3 = 125$, per cui la disuguaglianza si riscrive ulteriormente nella forma

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{10} < 10.$$

    La validità di tale disuguaglianza può essere verificata in vari modi; una possibilità è quella di osservare che $\frac{128}{125} = 1 + \frac{3}{125} < 1 + \frac{1}{40}$, da cui

$$\left(\frac{128}{125}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{40}\right)^2 = 1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{1600} < 1 + \frac{1}{19},$$

    ed elevando nuovamente al quadrato

$$\left(\frac{128}{125}\right)^4 < \left(1 + \frac{1}{19}\right)^2 = 1 + \frac{2}{19} + \frac{1}{361} < 1 + \frac{1}{9}$$

    Continuando in questo modo troviamo immediatamente $\left(\frac{128}{125}\right)^8 < 2$ e quindi $\left(\frac{128}{125}\right)^{10} < \left(\frac{128}{125}\right)^{16} < 2^2 = 4 < 10$ come voluto.

    Siccome i numeri scritti da Maddalena hanno lunghezza variabile fra 1 e 31, otteniamo che le potenze di 2 che iniziano per 1 scritte da Maddalena sono esattamente 31.

11. La risposta è **(B)**. Il numero di πcchi dopo 7 nidiate può assumere qualsiasi valore dispari fra 7 e $2^9 - 1$, e nessun altro. La risposta alla domanda è quindi $\frac{2^9-1-7}{2} + 1 = 2^8 - 3 = 253$, in quanto questa è la quantità di numeri dispari compresi fra 7 e $2^9 - 1 = 511$.

    Giustifichiamo l'affermazione precedente tramite i seguenti fatti:

    (a) una famiglia costituita da 1 solo πcchio continuerà per sempre ad essere costituita da un solo πcchio: evidente;

    (b) una famiglia costituita da 2 πcchi può dar origine, dopo $n \geq 1$ nidiate, a non più di 2^{n+1} πcchi;

    (c) una famiglia costituita da 3 πcchi può dar origine, dopo $n \geq 1$ nidiate, ad un qualsiasi numero di πcchi che sia dispari e compreso fra 7 e $2^{n+2} - 1$.

Dimostriamo le affermazioni (b) e (c) simultaneamente per induzione: assumendo che (b) e (c) valgano per un certo n le dimostreremo per $n+1$. Si osservi che il caso base $n=1$ è evidente per entrambe. Si osservi inoltre che la parità del numero di πcchi non cambia dopo una nidiata, per cui la condizione di parità affermata al punto (c) è effettivamente necessaria. Inoltre:

(b) in questo caso, dopo una nidiata abbiamo 4 πcchi, che possono vivere in quattro famiglie da 1 (e in tal caso a tutte le generazioni successive avremo ancora 4 πcchi), una famiglia da 2 e due da 1, due famiglie da 2, o una famiglia da 3 e una da 1. Nei vari casi, le affermazioni (b) e (c) per n nidiate mostrano che – dopo ulteriori n nidiate – avremo al massimo

$$1+1+1+1, \quad 2^{n+1}+1+1, \quad 2^{n+1}+2^{n+1}, \quad \left(2^{n+2}-1\right)+1$$

πcchi. Siccome ognuno di questi numeri è minore o uguale a 2^{n+2}, questo dimostra l'affermazione (b) per $n+1$ nidiate.

(c) in questo caso, dopo una nidiata i 7 πcchi possono essere distribuiti in famiglie nei modi seguenti:

$$3+3+1, \quad 3+2+2, \quad 3+2+1+1,$$
$$3+1+1+1+1, \quad 2+2+2+1, \quad 2+2+1+1+1,$$
$$2+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1+1.$$

Dopo ulteriori n nidiate, usando come sopra l'ipotesi induttiva otteniamo che nei vari casi il numero totale di πcchi è al massimo

$$2\left(2^{n+2}-1\right)+1, \quad \left(2^{n+2}-1\right)+2\left(2^{n+1}\right), \quad \left(2^{n+2}-1\right)+\left(2^{n+1}\right)+1+1,$$
$$\left(2^{n+2}-1\right)+1+1+1+1, \quad 3\cdot\left(2^{n+1}\right)+1, \quad 2\cdot\left(2^{n+1}\right)+1+1+1$$
$$\left(2^{n+1}\right)+1+1+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1+1+1.$$

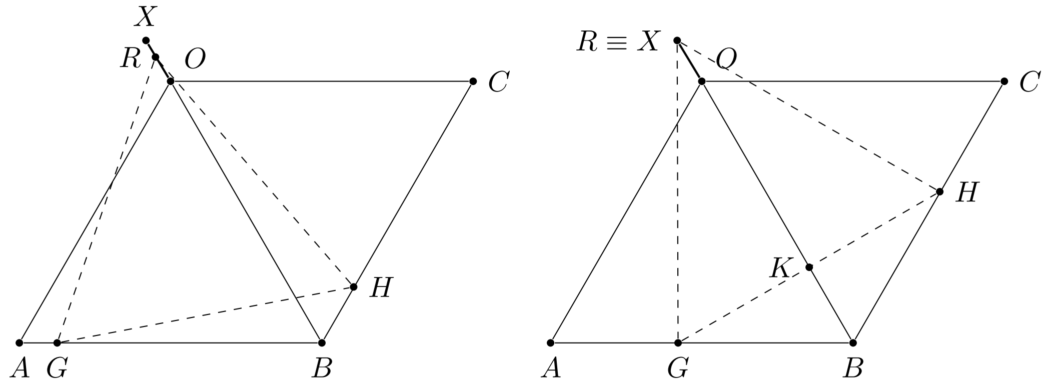
È facile verificare che ognuno di questi numeri è minore o uguale a $2^{n+3}-1$. Infine, se dopo la prima nidiata i 7 πcchi sono organizzati in famiglie come $3+3+1$, allora dopo ulteriori n nidiate il numero di πcchi sarà della forma d_1+d_2+1, dove d_1, d_2 possono assumere *qualsiasi* valore dispari compreso fra 7 e $2^{n+2}-1$. L'espressione d_1+d_2+1 può allora assumere qualsiasi valore dispari compreso fra $7+7+1=15$ e $2\cdot 2^{n+2}-2+1=2^{n+3}-1$. Resta solo da mostrare che il numero di πcchi dopo $n+1\geq 2$ nidiate può essere anche 7, 9, 11 o 13, ma questo è facile. Infatti, se ad un certo punto i πcchi si organizzano in famiglie da 1, da quel punto in poi il loro numero non crescerà più, per cui è sufficiente dimostrare che tali numeri di πcchi sono realizzabili dopo al più due nidiate, ad esempio come segue:

$$3\to 7; \quad 3\to 2+1+1+1+1+1\to 4+1+1+1+1+1=9;$$

$$3\to 2+2+1+1+1\to 4+4+1+1+1=11; \quad 3\to 2+2+2+1\to 4+4+4+1=13.$$

12. La risposta è **(C)**. Mostriamo che, nello spostare il primo vertice vincolato del triangolo da un estremo all'altro di un singolo lato dell'esagono, il vertice non vincolato percorre avanti e indietro un segmento di lunghezza $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$.

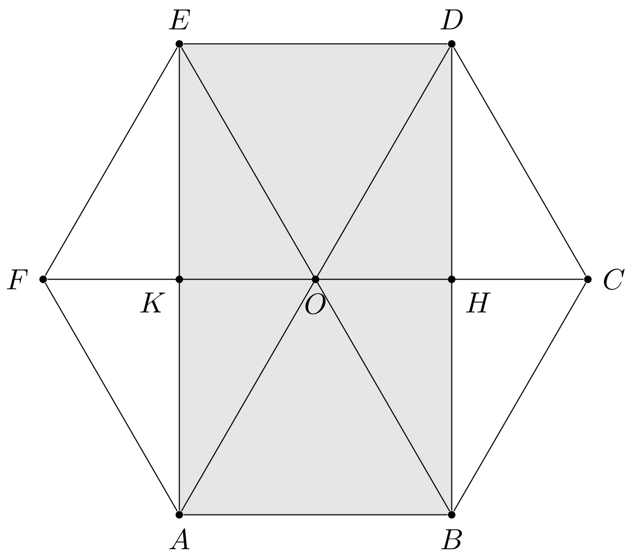
    In effetti, sia $ABCDEF$ l'esagono, sia O il suo centro; siano G e H sui segmenti AB e BC, rispettivamente, tali che $GH=AB$, e sia R il punto dalla stessa parte di O rispetto alla retta GH tale che GHR sia un triangolo equilatero. Vogliamo dimostrare che R si trova sulla retta OB.



Notiamo che il quadrilatero $GBHR$ è ciclico, poiché la somma degli angoli $\widehat{GBH} = 120°$ e $\widehat{GRH} = 60°$ è un angolo piatto. Segue che $\widehat{GBR} = \widehat{GHR} = 60°$, dunque $\widehat{GBR} = \widehat{GBO}$ come desiderato. Calcoliamo inoltre la distanza di R da O nel caso in cui GH sia ortogonale a BO (ovvero H sia il simmetrico di G rispetto a tale retta). In questo caso, detto K il punto di intersezione fra BO e GH, i triangoli KGB e KHB sono congruenti e rettangoli, ciascuno la metà di un triangolo equilatero, da cui $BK = \frac{1}{\sqrt{3}}GK = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Dato che $RK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $OB = 1$, vale $RO = RK - (OB - BK) = 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

Risulta dunque che, quando un vertice vincolato del triangolo rettangolo si muove da A a B e il secondo vertice vincolato da B a C, il vertice non vincolato percorre avanti e indietro un segmento OX di lunghezza $2\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$. In totale, la lunghezza percorsa dal vertice non vincolato è $12 \cdot OX = 8\sqrt{3} - 12$.

13. La risposta è 1536.



Sia $ABCDEF$ un esagono regolare che rappresenti il tavolo; la tovaglia di area $1024\,\mathrm{cm}^2$ copre esattamente il rettangolo $ABDE$. Detto O il centro dell'esagono e detti H, K i punti di intersezione fra i segmenti BD e OC, AE e OF, rispettivamente, i triangoli OAK, OEK, OBH e ODH sono tutti congruenti e di area pari a metà dell'area dei triangoli equilateri ABO e DEO. Segue che l'area del rettangolo $ABDE$ pari a quattro volte l'area di ABO, mentre l'area del tavolo vale sei volte l'area di ABO. Se ne conclude che l'area del tavolo è di $\frac{6}{4} \cdot 1024\,\mathrm{cm}^2 = 1536\,\mathrm{cm}^2$.

14. La risposta è 6. Mostreremo che gli interi n voluti sono precisamente gli interi positivi dispari minori o uguali ad 11. Osserviamo che $2022 + \frac{1}{2} = \frac{4045}{2}$ e $25 + \frac{1}{2} = \frac{51}{2}$, per cui stiamo cercando gli interi positivi n per i quali la frazione $\frac{4045^n + 51^n}{2^n}$ sia intera. Osserviamo intanto che se $n = 2k$ è pari questo non accade mai: infatti il numeratore è pari, ma non divisibile per 4, in quanto 4045^{2k} e 51^{2k} lasciano entrambi resto 1 nella divisione per 4 (per dimostrare questo fatto basta

osservare che $4045^{2k}-1=(4045^k+1)(4045^k-1)$ è prodotto di due numeri pari, e perciò è divisibile per 4; similmente per $51^{2k}-1)$, e quindi la loro somma lascia resto 2 nella divisione per 4. Quando $n=2k+1$ è dispari, invece, possiamo usare la nota fattorizzazione per una somma di due potenze dispari di uguale esponente per ottenere

$$4045^{2k+1}+51^{2k+1}=(4045+51)\cdot\left(4045^{2k}-4045^{2k-1}\cdot 51+\cdots-4045\cdot 51^{2k-1}+51^{2k}\right)$$

Il numero nella seconda parentesi è la somma algebrica di $2k+1$ termini dispari, quindi è dispari. Il prodotto appena scritto è quindi divisibile per 2^{2k+1} se e solo se lo è $4045+51=4096=2^{12}$. Questo accade se e solo se $2k+1\leq 12$, cioè per $k=0,1,\ldots,5$, valori che forniscono le 6 soluzioni volute.

15. (a) Dobbiamo dimostrare che, per n sufficientemente grande, il numero $abc=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$ divide $cba\cdot 10^n=cba\cdot 2^n\cdot 5^n$. Mostreremo che questa condizione è rispettata con $n=\max\{x,z\}$. Sicuramente con questa scelta di n si ha che $2^x\cdot 5^z$ divide $2^n\cdot 5^n$. Basta quindi verificare che 3^y divida $cba\cdot 10^n$, e chiaramente per far questo è sufficiente mostrare che 3^y divide cba. Per $y=0$ non c'è niente da dimostrare ($3^0=1$ divide qualsiasi numero). Per $y=1$ abbiamo che 3 divide abc, ovvero, per il noto criterio di divisibilità per 3, che 3 divide $a+b+c$. Per lo stesso criterio di divisibilità abbiamo allora che $3=3^y$ divide cba (la cui somma delle cifre è ancora $a+b+c$), da cui la tesi. Nel caso $y=2$ procediamo similmente: il criterio di divisibilità per 9 garantisce che $a+b+c$ sia multiplo di 9, e quindi anche cba è multiplo di $3^y=9$, come voluto.

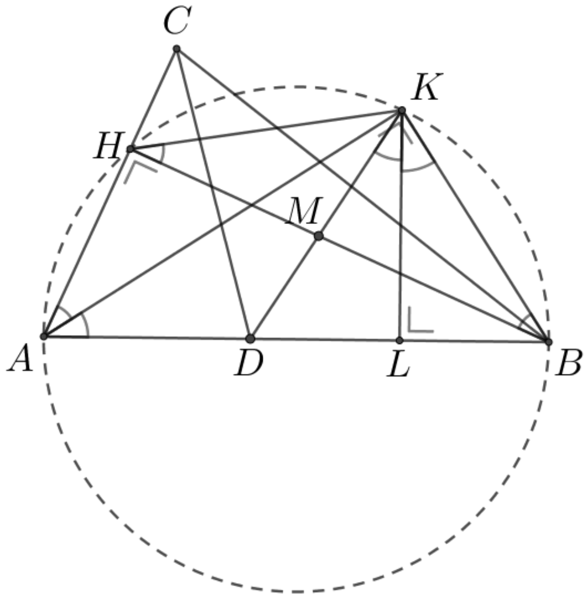
Seconda soluzione. Scriviamo più propriamente $abc=100a+10b+c$ e $cba=100c+10b+a$. Si chiede di mostrare che $100a+10b+c=2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$ divide $(100c+10b+a)\cdot 10^n$ per n sufficientemente grande. Un intero k divide un intero m se e solo se k divide $m-tk$, dove t è un qualsiasi numero intero. In particolare, preso $t=10^n$, si ha che $100a+10b+c$ divide $(100c+10b+a)\cdot 10^n$ se e solo se divide $(100c+10b+a)\cdot 10^n-(100a+10b+c)\cdot 10^n=9\cdot 11\cdot(c-a)\cdot 10^n$. Dato che per ipotesi $y\leq 2$, è chiaro che per $n=\max\{x,z\}$ si ha la divisibilità voluta, in quanto 3^y divide 9 e $2^x\cdot 5^z$ divide $10^{\max\{x,z\}}=2^{\max\{x,z\}}\cdot 5^{\max\{x,z\}}$.

(b) Consideriamo per quali k il numero abc divida $cba\cdot 10^k=cba\cdot 2^k\cdot 5^k$. Scriviamo la fattorizzazione in primi di abc come $2^x\cdot 5^y\cdot p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$, dove $p_1,\ldots,p_k$ sono primi distinti fra loro e distinti da 2 e 5. Scriviamo similmente la fattorizzazione di cba come $2^X\cdot 5^Y\cdot q_1^{f_1}\cdots q_r^{f_r}$. La condizione di divisibilità è che ogni primo appaia nella fattorizzazione di abc con esponente minore o uguale a quello con cui appare in $cba\cdot 10^k$. Per i primi diversi da 2 e 5, questo vuol dire che ogni p_i appare anche nella fattorizzazione di cba, e che l'esponente con cui divide cba è maggiore o uguale di quello con cui divide abc. Questa condizione non dipende da k. Per i primi 2 e 5 invece la condizione

$$2^x\cdot 5^y \text{ divide } cba\cdot 10^k=2^{X+k}\cdot 5^{Y+k}\cdot q_1^{f_1}\cdots q_r^{f_r}$$

si traduce in $x\leq X+k$ e $y\leq Y+k$. Affermiamo allora che non può mai essere necessario un valore di k strettamente superiore a 9: infatti $k=10$ può essere necessario solo se $x\geq 10$ o $y\geq 10$, ma in tal caso abc sarebbe divisibile o per $2^{10}=1024$ o per $5^{10}>1000$, e quindi non potrebbe essere un numero di tre cifre. Questo mostra che il massimo fiore non può superare 9. D'altra parte, preso $abc=512=2^9$, abbiamo che il minimo k per cui abc divide $cba\cdot 10^k=215\cdot 2^k\cdot 5^k$ è proprio 9 (i fattori 2 in quest'ultimo prodotto sono esattamente k). Il massimo fiore di un numero petaloso di tre cifre è quindi 9.

(c) Supponiamo per assurdo che 13 divida il numero petaloso abc. Per quanto dimostrato al punto precedente vediamo che 13 divide anche cba. Scrivendo esplicitamente questi numeri in termini della loro rappresentazione in base 10 abbiamo $abc=100a+10b+c$ e $cba=100c+10b+a$. Se 13 divide entrambi questi numeri, allora deve dividere la loro differenza, che è $99(c-a)$. Ora osserviamo che 13 è un numero primo, per cui il prodotto $99(c-a)$ è divisibile per 13 se e solo se lo è uno dei due fattori. Tuttavia 99 non è divisibile per 13, come è facile verificare con un calcolo diretto, e $c-a$ non è divisibile per 13 in quanto differenza di 2 cifre distinte e non nulle: si ha in effetti $0<|c-a|\leq 8$, e quindi certamente $c-a$ non è multiplo di 13. Siamo giunti ad un assurdo, per cui l'ipotesi originaria che 13 dividesse abc doveva essere falsa, il che mostra la tesi.



16. (a) Osserviamo intanto che il quadrilatero $AHKB$ è inscrivibile in una circonferenza, in quanto gli angoli $\widehat{AHB}$ e $\widehat{AKB}$ sono uguali (in particolare, retti). Gli angoli alla circonferenza $\widehat{KBH}$ e $\widehat{KAH}$ insistono sul medesimo arco e sono quindi uguali. D'altro canto $\widehat{KAH} = \widehat{BAK}$ per costruzione; sia α l'ampiezza comune di questi due angoli. Anche gli angoli alla circonferenza $\widehat{BHK}$ e $\widehat{BAK}$ insistono sullo stesso arco, e quindi sono uguali fra loro (e ad α). Ne segue che il triangolo HKB è isoscele su base HB, in quanto gli angoli $\widehat{BHK}$ e $\widehat{KBH}$ sono entrambi pari ad α. Detto M il punto medio di HB, il segmento KM è altezza e mediana dell'angolo in K del triangolo HKB, per cui $BH = 2BM$ e il triangolo BMK è rettangolo in M.

Dal momento che il triangolo KLB è rettangolo in L abbiamo $\widehat{KBL}+\widehat{LKB} = 90°$. Siccome anche AKB è rettangolo (in K), abbiamo anche $90° = \widehat{KBA}+\widehat{BAK} = \widehat{KBL}+\alpha$. Combinando le ultime due equazioni otteniamo allora $\widehat{LKB} = \alpha$. In particolare, il triangolo BLK è simile al triangolo KMB, in quanto entrambi sono rettangoli e hanno uno dei due angoli acuti uguale ad α. D'altro canto essi sono anche congruenti, visto che hanno l'ipotenusa in comune. Ne segue quindi che $BM = LK$, e infine che $BH = 2BM = 2LK$.

Seconda soluzione. Detto α l'angolo $\widehat{BAK}$, cosicché BAH è di ampiezza 2α, usando il fatto che i triangoli AHB, AKB e ALB sono tutti rettangoli per ipotesi si ottiene

$$BH = AB \cdot \sin(\widehat{BAH}) = AB \cdot \sin(2\alpha) = 2 \cdot AB \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha),$$

dove si è usata la formula di duplicazione del seno, e

$$LK = AK \cdot \sin(\alpha) = AB \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha),$$

da cui segue la tesi.

(b) Si ha $\widehat{HKA} = \widehat{HBA}$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Dal momento che il triangolo AHB è rettangolo in H, l'angolo $\widehat{HBA}$ è uguale a $90° - \widehat{BAH} = 90° - 2\alpha$.

L'angolo $\widehat{AKD}$ è invece uguale a $\widehat{AKB} - \widehat{LKB} - \widehat{DKL}$. L'angolo $\widehat{AKB}$ è retto per costruzione; l'angolo $\widehat{LKB}$ è pari ad α come mostrato al punto precedente. Infine, l'angolo $\widehat{DKL}$ è uguale a $\widehat{LKB}$ in quanto i triangoli BLK e DLK sono uno il simmetrico dell'altro rispetto al segmento KL. Otteniamo quindi $\widehat{AKD} = \widehat{AKB}-\widehat{LKB}-\widehat{DKL} = 90°-\alpha-\alpha = 90° - 2\alpha = \widehat{HKA}$, che è la tesi.

(c) Il segmento DK è uguale al segmento BK, che a sua volta, come mostrato nel primo punto, è uguale a KH. Il triangolo HKD è quindi isoscele su base HD. I triangoli KAH e KAD sono simili, in quanto

$$\widehat{DAK} = \widehat{KAH} = \alpha, \quad \widehat{AKD} = \widehat{HKA},$$

dove la seconda uguaglianza è stata mostrata al punto precedente. Essi sono allora anche uguali, perché hanno un lato corrispondente, ovvero AK, in comune. Segue quindi che i lati corrispondenti AH e AD sono uguali, come voluto.

Seconda soluzione. Sfruttando i medesimi triangoli rettangoli considerati al primo punto abbiamo

$$AH = AB \cdot \cos(2\alpha) = AB \cdot \left(1 - 2\sin^2(\alpha)\right),$$

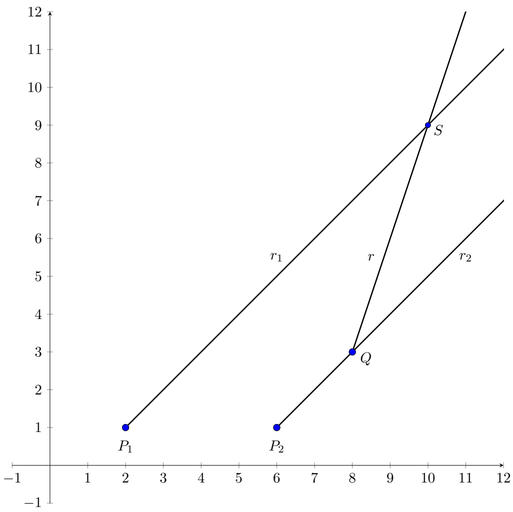
dove si è usata la formula di duplicazione del coseno, e

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB = AB - 2LB = AB - 2BK \cdot \sin(\alpha) \\ &= AB - 2AB \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = AB \cdot \left(1 - 2\sin^2(\alpha)\right), \end{aligned}$$

che è la tesi.

17. Consideriamo due punti qualsiasi $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_1)$ giacenti sulla semiretta orizzontale data dall'intersezione di $y = y_1$ con il primo quadrante (si veda anche la figura, dove $y_1 = 1$). Siano r_1, r_2 le due semirette uscenti da P_1, P_2 considerate nel problema. Tali semirette hanno la stessa pendenza rispetto all'asse orizzontale e sono quindi parallele. Questo si può vedere anche in termini di geometria euclidea, in quanto i triangoli formati dai punti $P_1, (x_1+1, y_1), (x_1+1, 2y_1)$ e $P_2, (x_2+1, y_1), (x_2+1{,}2y_1)$ si ottengono l'uno dall'altro tramite una traslazione orizzontale di $x_2 - x_1$, e quindi le loro ipotenuse (che giacciono sulle semirette r_1, r_2) sono parallele.

    A meno di simmetria supponiamo ora che $x_2 > x_1$, cosicché la semiretta r_2 giace a destra di r_1. Scegliamo un qualsiasi punto $Q = (x_Q, y_Q)$ su r_2 distinto da P_2. Si ha in particolare $y_Q > y_1$, in quanto P_2 è il punto di ordinata minima sull'intera semiretta r_2. La semiretta r uscente da Q e passante per $(x_Q + 1, 2y_Q)$ ha pendenza y_Q, maggiore della pendenza della semiretta r_1, e quindi r_1 ed r si incontrano in un qualche punto S a destra di Q.



    Segue allora dalle ipotesi del problema che S ha lo stesso colore di Q (in quanto S appartiene alla semiretta r) e che Q ha lo stesso colore di P_2 (in quanto appartiene alla semiretta r_2). D'altro canto, è anche vero che S appartiene alla semiretta r_1, e quindi ha lo stesso colore di P_1. Ne segue perciò che P_1, Q e P_2 hanno tutti lo stesso colore. Dal momento che i punti P_1, P_2 erano scelti arbitrariamente sulla retta $y = y_1$, questo mostra che tale retta orizzontale è costituita da punti tutti dello stesso colore. Visto poi che anche y_1 era scelto arbitrariamente, otteniamo che ogni semiretta orizzontale è monocromatica.

    Infine, prendiamo due qualsiasi semirette orizzontali s_1, s_2, date dalle intersezioni con il primo quadrante rispettivamente delle rette $y = y_1$ e $y = y_2$. A meno di simmetria possiamo supporre $y_1 < y_2$. Si consideri un punto qualsiasi P sulla semiretta s_1. La semiretta r_P uscente da P con pendenza pari all'ordinata di P interseca ogni retta orizzontale che stia sopra s_1, e quindi in particolare interseca s_2. Dato che la semiretta r_P è monocromatica e contiene tanto un punto di s_1 quanto un punto di s_2, otteniamo che il colore comune di tutti i punti di s_1 è uguale al colore comune di tutti i punti di s_2. Infine, questo ragionamento vale per qualsiasi coppia di semirette orizzontali, e quindi ogni punto del primo quadrante è colorato con lo stesso colore.

Concludiamo includendo per completezza una verifica algebrica dell'affermazione (graficamente evidente) che le semirette r ed r_1 si incontrino effettivamente in un qualche punto S. Le rette contenenti le semirette r_1, r_2 hanno equazioni rispettive $y = y_1(x - x_1) + y_1, y = y_1(x - x_2) + y_1$, dove supponiamo $x_2 > x_1$. Le semirette r_1 ed r_2 sono descritte da tali equazioni, ristrette però a valori $x \geq x_1$ (rispettivamente $x \geq x_2$).

Se chiamiamo (x_Q, y_Q) le coordinate del punto Q (con $x_Q > x_2$) si ha allora $y_Q = y_1(x_Q - x_2) + y_1 = y_1(x_Q - x_2 + 1)$, e la retta contenente la semiretta r ha equazione $y = y_Q(x - x_Q + 1)$ (i punti della semiretta sono quelli con $x \geq x_Q$). Mettendo a sistema tale equazione con quella della retta contenente r_1 si trova

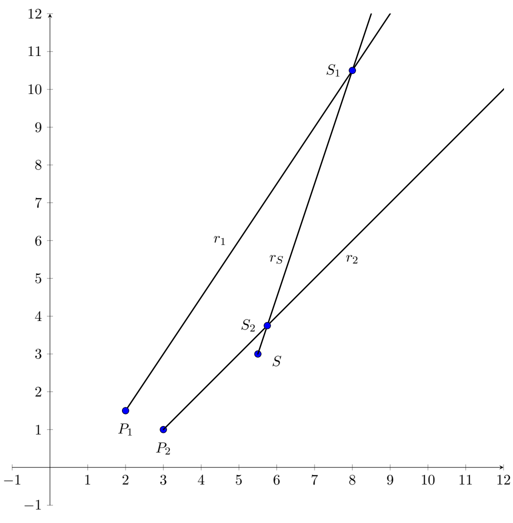
$$\begin{cases} y = y_1(x - x_1 + 1) \\ y = y_Q(x - x_Q + 1), \end{cases}$$

da cui possiamo ottenere la coordinata x del punto di intersezione, ovvero

$$\begin{aligned} x &= \frac{y_1 - y_Q}{y_Q - y_1} + \frac{y_Q \cdot x_Q - x_1 y_1}{y_Q - y_1} = -1 + \frac{y_1(x_Q - x_2 + 1) \cdot x_Q - x_1 y_1}{y_1(x_Q - x_2)} \\ &= -1 + \frac{(x_Q - x_2 + 1) \cdot x_Q - x_1}{x_Q - x_2} = -1 + \frac{x_Q - x_1}{x_Q - x_2} + x_Q. \end{aligned}$$

Basta ora osservare che $x_1 < x_2 < x_Q$ implica $x_Q - x_1 > x_Q - x_2 > 0$, per cui il rapporto $\frac{x_Q - x_1}{x_Q - x_2}$ è strettamente maggiore di 1, e quindi la coordinata x del punto di intersezione calcolata qui sopra è strettamente maggiore di x_Q (quindi anche di x_1), ovvero effettivamente tale punto è a destra di Q ed appartiene alle *semi*rette r ed r_1.

Seconda soluzione.



Mostriamo direttamente che due punti qualsiasi $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ del primo quadrante hanno lo stesso colore. Siano r_1, r_2 le semirette uscenti da P_1, P_2 con pendenze rispettive y_1, y_2.

Osserviamo come caso speciale che se r_1, r_2 si incontrano in un punto Q, allora chiaramente P_1 e P_2 hanno lo stesso colore, perché Q ha lo stesso colore di P_1 (in quanto sta su r_1) e anche lo stesso colore di P_2 (in quanto sta su r_2).

Nel caso generale (ovvero che r_1, r_2 si intersechino o meno) possiamo procedere come segue. Scegliamo un punto $S = (x_S, y_S)$ che rispetti le seguenti condizioni:

(a) S è a destra sia di P_1 che di P_2;

(b) S è al di sotto tanto di r_1 quanto di r_2;

(c) y_S è maggiore sia di y_1 che di y_2.

Mostreremo sotto per via algebrica che un tale punto esiste sempre. La semiretta r_S uscente da S ha pendenza y_S, maggiore di quelle di r_1, r_2, e siccome S è sotto r_1, r_2 e a destra di P_1, P_2, la semiretta r_S interseca sia r_1 che r_2, in due punti che chiamiamo S_1, S_2 (che queste semirette effettivamente si intersechino si può verificare per via algebrica in modo molto simile a quanto fatto nella prima soluzione). Il colore comune dei punti di r_1 è il colore di S_1 e il colore comune dei punti di r_2 è il colore di S_2. Ma d'altro canto S_1, S_2 appartengono alla stessa semiretta monocromatica r_S, per cui r_1, r_2 sono in effetti dello stesso colore. In particolare, P_1 e P_2 sono colorati con lo stesso colore. Siccome questo vale per ogni coppia di punti del primo quadrante, l'intero primo quadrante è colorato del medesimo colore.

Per mostrare l'esistenza del punto $S = (x_S, y_S)$ voluto, scegliamo

$$x_S = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}\right)$$

e $y_S = \max\{y_1, y_2\} + 1$. Si noti che x_S è maggiore sia di x_1 che di x_2, cioè S sta a destra di P_1 e P_2. Le rette contenenti le semirette r_1, r_2 hanno equazioni rispettive

$$y = y_1(x - x_1 + 1), \quad y = y_2(x - x_2 + 1);$$

le semirette r_1, r_2 sono ottenute restringendosi ai valori $x \geq x_1$ (rispettivamente $x \geq x_2$).

I punti T_1, T_2 di r_1, r_2 di ascissa x_S hanno quindi ordinate rispettive

$$y = y_1\left((x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}\right) - x_1 + 1\right) > y_1\left(\frac{1 + y_2}{y_1} + 1\right) = y_1 + y_2 + 1$$

e

$$y = y_2\left((x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2}\right) - x_2 + 1\right) > y_2\left(\frac{1 + y_1}{y_2} + 1\right) = y_1 + y_2 + 1.$$

Si osservi che siccome y_1, y_2 sono positive si ha $y_1 + y_2 + 1 > \max\{y_1, y_2\} + 1$. Ne segue che il punto $S = (x_S, y_S)$ ha ordinata strettamente minore di T_1, T_2 e quindi si trova effettivamente al di sotto delle semirette r_1, r_2. D'altro canto, per costruzione S ha ordinata strettamente maggiore di y_1, y_2, per cui ha tutte le proprietà volute.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **5 punti**. Di questi, si assegnino **2 punti** per chi argomenta che scegliere n sufficientemente grande garantisce la divisibilità per 2^x e 5^z, e **3 punti** per chi tratta correttamente il fattore 3^y (di questi, nessun punto per il caso $y = 0$, **1 punto** per chi menziona il criterio di divisibilità per 3 o per 9 in termine delle cifre, e i rimanenti **2 punti** per chi conclude).

  Per quanto riguarda l'approccio della seconda soluzione si assegnino invece **2 punti** a chi tratti correttamente i fattori 2^x e 5^z, **2 punti** a chi consideri la differenza $cba - abc$ e la scriva nella forma $99(c - a)$, e **1 punto** a chi deduca da questo che la condizione di divisibilità è rispettata per il fattore 3^y.

- Il punto (b) vale **5 punti**. Di questi si assegnino **2 punti** per l'esempio del numero 512 e **3 punti** per la dimostrazione del fatto che il fiore non può superare 9 (di questi, **1 punto** per chi argomenta o anche solo osserva che i primi diversi da 2 e 5 non intervengono nella questione).

- Il punto (c) vale **5 punti**. Di questi si assegnino fino a **2 punti** per chi arriva a considerare la differenza $99(c - a)$.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **7 punti**. Si assegnino **2 punti** per chi dimostra la ciclicità del quadrilatero $AHKB$ (di cui **1 punto** per chi la afferma senza giustificazione), **1 punto** per chi ne deduca che il triangolo KHB è isoscele su base HB, **3 punti** per dedurre che i triangoli KLB e KMB sono congruenti (di cui **2 punti** per la dimostrazione che siano simili), **1 punto** per concludere.

  Per chi scelga la strada della seconda soluzione, si assegnino invece **2 punti** per l'uguaglianza $BH = AB \cdot \sin(2\alpha)$, **2 punti** per il calcolo di LK in termini di AB e $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$, e **3 punti** per l'osservazione che l'uguaglianza voluta segue dalla formula di duplicazione del seno.

- Il punto (b) vale **4 punti**. Di questi, si assegnino **2 punti** per il calcolo dell'angolo $\widehat{HKA}$ in termini di α e **2 punti** per il calcolo di $\widehat{AKD}$ in termini di α.

- Il punto (c) vale **4 punti**; si assegnino tutti i punti anche a chi dimostri il punto (c) usando i punti (a) e (b), senza essere riuscito a dimostrarli. Si assegnino **2 punti** a chi dimostra che HKD è isoscele su base HD, e **2 punti** a chi dimostri che i triangoli AHK e ADK sono congruenti.

  Per chi scelga la strada della seconda soluzione, si assegnino invece **0 punti** per l'uguaglianza $AH = AB \cdot \cos(2\alpha)$, **2 punti** per il calcolo di AD in termini di AB e $\sin(\alpha)$, e **2 punti** per l'osservazione che le due espressioni trovate sono uguali grazie alla formula di duplicazione del coseno.

Si assegni inoltre **1 punto** addizionale se la soluzione riporta una figura costruita in modo corretto, purché questo non conduca un concorrente con una soluzione incompleta ad ottenere 15 punti.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- **2 punti** a chi osservi che, dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ del primo quadrante, se le semirette r_1, r_2 uscenti da P_1, P_2 e con pendenze rispettive y_1, y_2 si intersecano, allora P_1, P_2 hanno lo stesso colore.

- **2 punti** a chi scriva esplicitamente una condizione sufficiente affinché la condizione del punto precedente sia soddisfatta da P_1, P_2, ad esempio: *se P_2 si trova più a destra e più in alto di P_1, allora le semirette uscenti da P_1, P_2 si intersecano.*

- **1 punto** a chi dichiari di voler dimostrare che tutti i punti lungo un luogo geometrico semplice (quale una semiretta orizzontale, come nella soluzione presentata qui sopra, o una semiretta verticale) hanno lo stesso colore. Chiamiamo tale affermazione *esistenza di una semiretta monocromatica non banale.* Naturalmente tale luogo geometrico non deve essere una delle semirette descritte nel testo del problema.

- **5 punti** per una dimostrazione completa del fatto che il primo quadrante sia unione di semirette monocromatiche non banali (o un risultato analogo); punteggi parziali possono essere attribuiti per dimostrazioni considerate incomplete o difettose.

- **5 punti** per chi deduca la tesi del problema da un risultato come quello del punto precedente. Si assegnino tali punti anche in assenza della dimostrazione di tale risultato intermedio.

Non si deduca alcun punto a quei concorrenti che non verificano algebricamente che le semirette r ed r_1 effettivamente si intersechino e si limitano ad argomentare questo fatto sulla base dell'intuizione geometrica.

Per chi segua la strada della seconda soluzione proposta si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- **2 punti** a chi osservi che, dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ del primo quadrante, se le semirette r_1, r_2 uscenti da P_1, P_2 e con pendenze rispettive y_1, y_2 si intersecano, allora P_1, P_2 hanno lo stesso colore.

- **2 punti** a chi scriva esplicitamente una condizione sufficiente affinché la condizione del punto precedente sia soddisfatta da P_1, P_2, ad esempio: *se P_2 si trova più a destra e più in alto di P_1, allora le semirette uscenti da P_1, P_2 si intersecano.*

- **4 punti** a chi definisca, in funzione di due punti P_1, P_2, un punto analogo a quello chiamato S nella soluzione presentata sopra e chiarisca precisamente quali condizioni debbano essere soddisfatte da tale punto (ovvero le condizioni (a), (b), (c) date nella soluzione).

- **4 punti** a chi deduca la tesi dell'esercizio dall'esistenza di un punto S con tali caratteristiche.

- **3 punti** per chi argomenti correttamente (o per via algebrica, o per via geometrica) l'esistenza del punto S voluto.