
STAGE
SENIOR
A DISTANZA

A1 basic - Esercizi

- Siano a, b, c, d reali tali che -20 sia radice di $x^3 + ax + b$ e -21 radice di $x^3 + cx^2 + d$. I due polinomi condividono una radice complessa $m + \sqrt{n}i$ con m, n interi. Trovare $m + n$.

- Sia $P(x)$ un polinomio di secondo grado monico a coefficienti complessi. Sapendo che $P(P(x)) = 0$ ha quattro soluzioni distinte, $x = 3, 4, a, b$. Quali sono i possibili valori di (a, b)?.

- Esistono tre differenti polinomi di secondo grado $f(x), g(x), h(x)$ tali che $f(x) = g(x)$ abbia soluzioni 1 e 4, $g(x) = h(x)$ abbia soluzioni 2 e 5 e $f(x) = h(x)$ abbia soluzioni 3 e 6?

- Sia $P(x)$ un polinomio di grado $n > 1$ a coefficienti reali. L'equazione $P(P(P(x))) = P(x)$ ha n^3 radici reali distinte. Provare che queste possono essere divise in due gruppi con uguale media aritmetica.

- Siano $z_1, \ldots, z_{673}$ numeri complessi distinti e consideriamo il polinomio $P(x) = (x - z_1)^3 \cdots (x - z_{673})^3$. Sapendo che $P(x) = x^{2019} + 20x^{2018} + 19x^{2017} + g(x)$ con $g(x)$ polinomio a coefficienti complessi di grado al più 2016, quanto vale

$$\left| \sum_{1 \le j < k \le 673} z_j z_k \right| ? \tag{1}$$

- Data $f(z) = z^2 - 19$, trovare un numero complesso z della forma $m + \sqrt{n} + 11i$ con m, n interi, tale che $z, f(z)$ e $f(f(z))$ formino un triangolo rettangolo nel piano complesso con angolo retto in $f(z)$.

- Il polinomio $f(x) = ax^{2018} + bx^{2017} + cx^{2016}$ è a coefficienti reali minori o uguali a 2019 ed inoltre

$$f\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) = 2015 + 2019\sqrt{3}i \tag{2}$$

  Trovare $f(1)$.

- Siano p, q polinomi non nulli a coefficienti reali tali che $p(z)q(\bar{z})$ sia reale per ogni complesso z. Dimostrare che $p(x) = kq(x)$ per qualche k reale.

- Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali $p(x)$ con la seguente proprietà: esiste un polinomio a coefficienti reali $q(x)$ tale che

$$p(1) + \cdots + p(n) = p(n)q(n) \tag{3}$$

  per ogni intero positivo n.

Foglio di esercizi di A2 Basic

AM-GM

1. $a, b > 0$ reali;
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, con $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$;
$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

3. $a > 0$ reale, n naturale;
$$(1 + a)^n \geq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a$$

4. $x, y, z > 0$;
$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$$

5. $x, y, z > 0$;
$$\frac{1}{8}(x + y)(y + z)(z + x) \geq \frac{1}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

6. $x, y, z > 0$ (hint: lavorare su LHS);
$$\sum_{cyc} (x + y)\sqrt{(y + z)(z + x)} \geq 4(xy + yz + zx).$$

7. $a, b, c, d > 0$;
$$a + b + c + d \geq 2\sqrt{ab + bc + cd + da}.$$

Cauchy-Schwarz

8. $x, y, z > 0$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$;
$$x + y + z \geq 9.$$

9. $a, b, c, d > 0$, trovare il minimo di
$$\frac{a}{b + c + d} + \frac{b}{c + d + a} + \frac{c}{d + a + b} + \frac{d}{a + b + c}.$$

10. $a, b, c > 0$, $abc = 1$;
$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

11. $x, y, z > 0$ (hint: lavorare sulla radice);
$$\sum_{cyc} (x + y)\sqrt{(y + z)(z + x)} \geq 4(xy + yz + zx).$$

12. $a, b, c, d > 0$, $a+b+c+d = 4$:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4.$$

13. $a, b, c, d > 0$, $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4.$$

Forza bruta

14. $a, b, c > 0$;

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

15. Determinare la più grande costante K tale che, per ogni $a, b, c > 0$,

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq K\sqrt{a+b+c}.$$

Omogeneizzare

16. $a, b, c > 0$, $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;

$$a+b+c \geq \frac{3}{abc}.$$

17. $a, b, c, d > 0$, $2(a+b+c+d) \geq abcd$;

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq abcd.$$

18. $a, b, c > 0$, $a+b+c = 1$;

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

19. $0 \leq a \leq b \leq c$ non tutti nulli, $a+b+c = ab+bc+ca$;

$$\sqrt{bc}(1+a) \geq 2.$$

Miscellanea

20. $a, b, c, d > 0$, trovare le migliori costanti C_1, C_2 tali che

$$C_1 \leq \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} \leq C_2.$$

21. $a, b, c > 0$;

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

22. Dimostrare il lemma di Titu con Jensen sulla funzione $f(x) = 1/x$.

23. Dimostrare Cauchy-Schwarz con Jensen sulla funzione $f(x) = x^2$.

Foglio di esercizi di A3 Basic

Funzionali

1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che
$$f(x + y) + 2021 = f(x) + f(y).$$

2. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che
$$f(x + f(y)) = f(x) + y + 2021.$$

3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x^2 + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

4. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x^2 + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

5. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$

6. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che
$$(n - 1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$
per ogni n intero positivo.

7. Sia $n > 0$ e siano $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ coppie di razionali positivi. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ tali che soddisfano entrambe le seguenti condizioni:
   (a) $f(xy) = f(x)f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
   (b) $f(a_i) = b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

   Dimostrare che $\mathcal{F} = \emptyset$ oppure $\mathcal{F}$ è infinito.

8. Trovare una funzione $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ tale che
$$f(x(f(y)) = \frac{f(x)}{y}$$
per ogni x, y numeri razionali positivi.

9. Dire se esiste una funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che
$$f(f(n)) = n + 1$$
per ogni intero n.

10. Dimostrare che l'identità di $\mathbb{Z}_{>0}$ è l'unica funzione $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tale che, per ogni intero positivo n, si ha:
$$f(f(n)) < f(n + 1).$$

Successioni

11. Per ogni possibile scelta dei termini a_0 e a_1, determinare formule chiuse per il termine n-esimo delle seguenti successioni definite per ricorrenza lineare:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} &= a_n - a_{n+1} \\ a_{n+2} &= a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} &= 16a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

12. Per ciascuna delle seguenti successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, determinare una relazione per ricorrenza lineare (omogenea) che soddisfa per ogni $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= n^3 \\ a_n &= 2^n - 1 \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots) \\ a_n &= 2^n + (-1)^n n \\ a_n &= \sum_{i=0}^{n} i^2 \\ a_n &= \sum_{i=0}^{n} i2^i. \end{aligned}$$

13. Per ciascuna coppia di successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, determinare una relazione per ricorrenza lineare che comprende solo termini in a_n e una che comprende solo termini in b_n.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n; \quad b_{n+1} = a_n - b_n \\ a_{n+1} &= a_n + 3b_n; \quad b_{n+1} = 2a_n + b_n \end{aligned}$$

14. Dati a_0, b_0 interi positivi, siano $a_{i+1} = a_i + \lfloor\sqrt{b_i}\rfloor$ e $b_{i+1} = b_i + \lfloor\sqrt{a_i}\rfloor$. Mostrare che esiste n intero positivo per cui $a_n = b_n$.

15. Determinare se esistono due reali x, y e una seguenza di reali non nulli a_n tali che $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$ e, per ogni $r > 0$ reale, esistono i, j interi positivi con $|a_i| < r < |a_j|$.

Foglio di esercizi di C1 Basic

Conteggi

1. Quanti sono i percorsi monotoni su una griglia 2021×2021 che non toccano la casella centrale?

2. Quanti sono i percorsi monotoni su una griglia 10×20, che partono in $(1, 1)$, arrivano in $(10, 20)$ e rimangono sempre in caselle (x, y) con $x \leq y$?

3. Quante sono le partizioni dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

4. Sia p un numero primo. Contare il numero di collane formate da p perle, ciascuna di colore bianco o nero. Due collane sono considerate uguali a meno di rotazione. Ricavarne una possibile dimostrazione di FLT.

5. Quanti sottoinsiemi di $\{1, 2, ..., 2n\}$ non contengono due numeri con somma $2n + 1$?

6. Quanti sono gli interi $1 \leq n \leq 7021$ tali che la somma delle cifre di n è multiplo di 7?

7. I numeri interi $1, 2, \ldots, n$ sono impilati inizialmente in questo ordine (in modo che n sia in cima alla pila). Ad ogni mossa, viene selezionato un certo numero i e viene fatto alzare di esattamente i posizioni (se il gettone i ha meno di i altri gettoni sopra di lui, allora non può essere selezionato). Supponendo di selezionare sempre il gettone più basso che possa essere mosso, determinare il numero di mosse per raggiungere la configurazione $n, n - 1, \ldots, 1$.

8. In quanti modi è possibile disporre n torri in una scacchiera $n \times n$ in modo che non ci siano righe o colonne con 2 torri?

Double-Counting

9. Sia X un insieme di n elementi e $Y = \mathcal{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Calcolare le seguenti somme:
$$\sum_{(A,B)\in Y^2} |A \cap B| \qquad \sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|$$
$$\sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cup C^c| \qquad \sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A \cap B \cap C|^2$$

10. Mostrare (possibilmente tramite un double-counting) le seguenti identità binomiali:

    - $$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$
    - $$\sum_{i\equiv 1 \pmod 2} \binom{n}{i} = \sum_{i\equiv 0 \pmod 2} \binom{n}{i}$$

- $$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{i-k} = \binom{n+m}{k}$$

- $$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$$

11. Sia $s(n)$ la somma delle cifre della scrittura binaria di n (es: $s(5) = s(101_2) = 2$). Calcolare $\sum_{i=1}^{2021} s(i)$.

12. Una scuola ha n studenti. Ogni studente può seguire quanti corsi vuole. Ogni corso ha almeno due studenti che lo seguono. Sappiamo inoltre che se due corsi hanno almeno due studenti in comune, allora i due corsi sono seguiti da un numero diverso di studenti. Dimostrare che ci possono essere al più $(n-1)^2$ corsi.

13. Una griglia di m righe ed n colonne contiene numeri reali nonnegativi e ogni riga e colonna contengono almeno un numero positivo. Inoltre se una riga e una colonna hanno un numero positivo nella loro intersezione, allora la somma dei loro elementi è la stessa. Mostrare che $m = n$.

14. 12 studenti partecipano ad alcune competizioni sportive, divise in n diverse specialità. Ad ogni specialità partecipano n studenti e per ogni coppia di specialità esistono al più due studenti che partecipano ad entrambe. Qual è il massimo valore di n?

Grafi

15. Una formica cammina lungo i lati dei quadretti di una griglia 2021×2021, ciascuno di dimensioni $1cm \times 1cm$. Alla fine ha camminato sopra tutti i lati almeno una volta. Quanti centimetri ha camminato, al minimo?

16. I lati di ciascun quadretto di una griglia $m \times n$ sono orientati con la seguente condizione: il bordo è orientato in senso orario e ogni vertice interno ha due lati entranti e due uscenti. Mostra che esiste un quadretto unitario con i lati orientati in senso orario.

17. Nella casa di Alberto ci sono delle lampade, almeno 3 per stanza. Ci sono anche degli interruttori tali che ciascuno di essi modifica simultaneamente lo stato di due lampade (non necessariamente nella stessa stanza). Ogni lampada è collegata a esattamente un interruttore. Mostrare che partendo da un qualsiasi stato iniziale di luci accese o spente Alberto può riuscire ad avere almeno una lampadina accesa e almeno una spenta in ciascuna stanza.

18. Siano $k, n \geq 1$ interi coprimi. I numeri naturali da 1 a $n + k$ sono scritti in fila in un certo ordine. È possibile scambiare di posizione due qualsiasi numeri la cui differenza sia n o k. Dimostrare che è possibile ordinare i numeri da 1 a $n+k$ indipendentemente dalla disposizione iniziale.

19. Ad una festa ci sono 99 invitati e ciascuna persona ha tra gli 81 e i 90 amici. Mostrare che esiste un gruppo di 10 persone con ugual numero di amici e con un amico comune a tutte e 10.

Foglio di esercizi di C2 Basic

Giochi

1. Alberto e Barbara partono con n monete sul tavolo. A turno, partendo da Alberto, devono togliere $p-1$ monete con p primo. Vince chi toglie l'ultima moneta. Mostra che Barbara ha una strategia vincente per infiniti n.

2. Alberto piazza un Re su una scacchiera $n \times n$, e poi, a partire da Barbara, lo muovono a turno (seguendo le regole degli scacchi) in una casella in cui non è già stato mosso prima. Chi non può muovere perde. Chi ha una strategia vincente?

3. n punti sono inizialmente disposti in cerchio. Antonio e Bianca, cominciando da Antonio, a turno scelgono tre punti (non scelti in precedenza) e tracciano il triangolo dato da essi, stando attenti a non intersecare linee tracciate in precedenza. In funzione di n stabilire chi ha una strategia vincente.

4. Alberto e Barbara giocano su una scacchiera $n \times n$ con tutte le caselle colorate di bianco tranne una di nero, in un angolo della scacchiera. Su questa casella si trova una torre. Un turno consiste nel muovere la torre orizzontalmente o verticalmente su una casella bianca e colorare questa casella di arrivo di nero. Inizia Alberto. Il giocatore che non può più muovere perde. Chi dei due ha una strategia vincente?

5. Una griglia consiste dei punti a coordinate intere sul piano (x, y) tali che $|x| \leq 2019$ e $|y| \leq 2019$, $|x| + |y| < 2 \cdot 2019$. I punti in cui $|x| = 2019$ oppure $|y| = 2019$ sono detti punti di bordo.

   Quando Barbara muove, sposta una pedina, inizialmente disposta in $(0, 0)$, esattamente di 3 punti (adiacenti per lato). Quando Alberto muove, piazza 2 muri nei punti di bordo di ciascuno dei 4 lati della griglia. Barbara non può muovere la pedina su un punto di bordo contenente un muro. Se invece muove la pedina su un punto di bordo senza muro vince.

   Dimostrare che Alberto ha una strategia per impedire a Barbara di vincere.

   Dimostrare che, se a Barbara è concesso muovere la sua pedina anche meno di 3 punti, allora è Barbara ad avere una strategia vincente.

Invarianti

6. In un sacchetto ci sono 15 biglie rosse, 12 biglie verdi e 20 biglie blu. Ad ogni mossa è possibile togliere 2 biglie di colori distinti e aggiungerne una del terzo colore. È possibile svuotare completamente il sacchetto?

7. Un cavallo degli scacchi si muove lungo una scacchiera 47×47. E' possibile che riesca a percorrere la scacchiera visitando tutte le caselle una e una sola volta?

8. Una scacchiera 8×8 è colorata in bianco e nero al solito modo. Posso applicare le seguenti trasformazioni:

   - scegliere una riga e invertire il colore di tutte le sue caselle;

- scegliere una colonna e invertire il colore di tutte le sue caselle;
- scegliere un quadrato 2×2 e invertire il colore di tutte le sue caselle.

Posso ottenere la situazione in cui solo la casella in alto a sinistra è nera?

9. In una griglia 9×9 sono disposte 65 pedine, inizialmente tutte su caselle diverse. Quando Alessandra batte le mani, tutte le pedine contemporaneamente si spostano su una casella adiacente, ma nessuna pedina può effettuare due spostamenti consecutivi lungo la stessa direzione. Dimostrare che, dopo un numero finito di battiti di mani, almeno due pedine si incontrano sulla stessa casella.

Monovarianti

10. Alberto e Barbara giocano con delle pile di monete. A turno, ciascun giocatore effettua una delle seguenti mosse: toglie un gettone da una pila (non vuota) oppure divide una pila in due pile (ciascuna non vuota). Dimostrare che dopo un numero finito di mosse, non è più possibile effettuarne altre.

11. Ci sono n nani, numerati da 1 a n, disposti in una coda. Ad ogni minuto, si sceglie un intero $1 \leq i \leq n$ e il nano i-esimo cambia il suo posto nella fila saltando esattamente i nani di fronte a se, se possibile, altrimenti il meccanismo si ferma. Dimostrare che, comunque scelta la disposizione iniziale della coda, il meccanismo si interrompe dopo un intervallo finito di tempo.

12. Sono date 2021 carte ciascuna con una faccia bianca e una nera. All'inizio sono disposte in fila tutte girate dal lato bianco. Con una mossa si può scegliere un blocco da 50 carte con la più a sinistra girata sul bianco e capovolgerle tutte. Dimostrare che prima o poi non si potrà più eseguire alcuna mossa.

13. Sulla lavagna sono scritti tutti i numeri interi positivi da 1 ad n con n dispari. Una mossa consiste nello scegliere due numeri della stessa parità, cancellarli dalla lavagna e sostituirli due numeri pari alla loro media. Mostrare che dopo un po' non è più possibile effettuare alcuna mosse e trovare il massimo numero di mosse in funzione di n.

14. Sulla lavagna sono scritti tutti gli interi fra 1 e 20. Ad ogni mossa è possibile cancellare due interi a, b tali che $b - a \geq 2$ e scrivere $a + 1$ e $b - 1$. Quante mosse posso fare, al più?

Stage Senior 2021- eserciziario G1 basic

Trigonometria

Esercizio 1. Calcolare, in termini dei lati e degli angoli del triangolo ABC le seguenti lunghezze

$$AH,\ HH_a,\ BH_a,\ H_aH_c,\ OM_a,\ AI$$

dove H_a, H_c sono i piedi delle altezze condotte sui lati a, c rispettivamente e M_a è il punto medio di BC.

Esercizio 2. Dimostrare la formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove $p = \frac{a+b+c}{2}$ è il semiperimetro.
Hint: usa il teorema del coseno per esprimere il coseno di un angolo interno in funzione delle lunghezze dei lati.

Esercizio 3. Dati α, β, γ angoli di un triangolo, dimostrare che

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

Esercizio 4. Sia ABC un triangolo e D un punto interno a CB. Posto $a_1 = DB, a_2 = DC, d = AD$, dimostrare che vale la seguente uguaglianza:

$$a_1b^2 + a_2c^2 = a(a_1a_2 + d^2)$$

Hint: applica il teorema del coseno ai triangoli ADC e ADB.

Esercizio 5. Usando il teorema di Stewart, calcolare le lunghezze delle mediane e delle bisettrici interne. Si calcoli inoltre la lunghezza delle bisettrici *esterne*.

Esercizio 6. Sia ABC un triangolo e siano D, E punti interni ai lati BC, AC rispettivamente. Sia P il punto di intersezione fra AD e BE: dimostrare che

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AE \cdot BC}{BD \cdot EC}$$

Dedurne il teorema di Ceva.

Esercizio 7. Usare l'esercizio precedente per calcolare $\frac{AI}{ID}$ nel caso in cui I sia l'incentro.

Esercizio 8. Sia ABC un triangolo e siano Y un punto sul segmento BC tale che $AY = CY$ e Z un punto sul segmento AY tale che $AB = CZ$. Denotiamo con X il punto d'intersezione della retta CZ e la retta AB. Dimostrare che il quadrilatero $BXZY$ è ciclico.

Esercizio 9. Sia ABC un triangolo e D, E, F dei punti sulle rette BC, AC, AB rispettivamente. Si mostri che D, E, F sono allineati se e solo se

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

dove i segmenti sono presi con segno.

Esercizio 10. Sia ABC un triangolo e A', B', C' i punti medi degli archi BC, CA, AB rispettivamente del circocerchio di ABC. La retta $A'B'$ interseca BC e AC in S e T, $B'C'$ interseca AC e AB in F e P e $C'A'$ interseca AB e BC in Q ed R.
Si provi che PS, QT, FR concorrono.

Esercizio 11. Sia $ABCD$ un parallelogramma. Se le rette PB e PD esterne al parallelogramma, formano angoli uguali con i lati BC e DC rispettivamente allora vale

$$\angle CPB = \angle DPA$$

Esercizio 12. Sia ABC un triangolo acutangolo e ω la sua circonferenza circoscritta di centro O. Sull'arco AB che non contiene C si scelga un punto X e sia D l'intersezione fra AB e CX. Siano O_1, O_2 i circocentri dei triangoli ADX e BDX rispettivamente.
Si determinino tutte le scelte di X tali che l'area di OO_1O_2 risulti minima.

Geometria Analitica

Esercizio 13. Siano Γ_1, Γ_2 due circonferenze nel piano di centri O_1, O_2 e raggi e raggi r_1, r_2 rispettivamente. Dimostrare che il luogo geometrico dei punti P tali che $O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$ è una retta ortogonale alla retta O_1O_2.

Esercizio 14. Sia Γ una circonferenza fissata e A, B due punti su essa. Si determinino i luoghi geometrici di G e H, baricentro ed ortocentro del triangolo ABC, al variare di C su Γ. Se ne deduca (ma il passaggio concettuale non è immediato dalle equazioni) il *lemma dell'ortocentro*, secondo cui le riflessioni dell'ortocentro rispetto ai lati di un triangolo giacciono sulla circoscritta al triangolo medesimo.

Esercizio 15. Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta e $P = (x_0, y_0)$ un punto del piano. Si dimostri che la distanza di P dalla retta r è data da

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Esercizio 16. Nel triangolo ABC si prolunghi il lato BC dalla parte di C di un segmento CD tale che $CD = BC$. Si prolunghi poi il lato CA dalla parte di A di un segmento AE tale che $2CA = AE$.
Dimostrare che se $AD = BE$ allora il triangolo ABC è rettangolo.

Vettori

Esercizio 17. Dimostrare che $\vec{I} = \frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$ (*attenzione*: vale per qualsiasi scelta dell'origine).

Esercizio 18. Dimostrare che $OH^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$.

Esercizio 19 (Teorema di Eulero)**.** Dimostrare che $OI^2 = R^2 - 2Rr$ usando i vettori.

Esercizio 20. Sia $ABCD$ un quadrato e Γ la sua circonferenza circoscritta. Dimostrare che l'espressione $PA^n + PB^n + PC^n + PD^n$ è costante al variare di P su Γ nel caso in cui $n = 2, 4, 6$. Riesci a determinare altri valori di n per cui la tesi rimane vera?

Esercizio 21. Ridimostrare la formula della distanza punto-retta (presente nella sezione *Geometria Analitica*) usando i vettori.

Esercizio 22. Sia $ABCD$ un quadrilatero: si mostri che $AC \perp BD$ se e solo se $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

Esercizio 23 (Teorema di Varignon)**.** Sia $ABCD$ un quadrilatero e siano M, N, P, Q i punti medi di AB, CD, BC, AD rispettivamente. Si mostri che

$$AC^2 + BD^2 = 2(MN^2 + PQ^2)$$

Si mostri inoltre che $AC \perp BD$ se e solo se $MN = PQ$.

Esercizio 24. Sia $ABCD$ un quadrilatero (non necessariamente convesso) e siano P, Q, R, S i punti medi di AB, BC, CD e AD rispettivamente. Mostrare che $PQRS$ è un parallelogramma.

Complessi

Esercizio 25. Sia $z = 1 + i$: calcolare $z^2, z^3, \ldots, z^8$. Qual è il significato geometrico?
Sia $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$: calcola $w^2, w^3, \ldots, w^8$.

Esercizio 26. Sia $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: calcolare $z^2, z^3, \ldots, z^6$. Chi è l'inverso di z?
Sia $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$: determinare la relazione fra w e z.

Esercizio 27. Siano a, b, c tre punti distinti del piano complesso. Dimostrare che a, b, c sono allineati se e solo se

$$\frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)}$$

Esercizio 28. Siano a, b, c, d quattro punti del piano complesso. Dimostrare che $AB \perp CD$ se e solo se

$$\frac{b-a}{c-d} + \overline{\left(\frac{b-a}{c-d}\right)} = 0$$

Esercizio 29. Siano a, b, c, d quattro punti del piano complesso. Mostrare che sono conciclici se e solo se

$$\frac{(b-c)(d-a)}{(d-c)(b-a)} \in \mathbb{R}$$

Esercizio 30. Dimostrare che l'equazione dell'asse del segmento AB è

$$p(\bar{b} - \bar{a}) + \bar{p}(b - a) + a\bar{a} - b\bar{b} = 0$$

Esercizio 31. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ due numeri complessi distinti tali che $a\bar{a} = b\bar{b} = 1$. Dimostrare che l'equazione della retta passante per a e b è

$$p + ab\bar{p} = a + b$$

Esercizio 32. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ due numeri complessi distinti che giacciono sulla circonferenza unitaria. Dimostrare che il punto p' simmetrico a p rispetto alla retta passante per a e b si esprime come

$$p' = \frac{\bar{p}(b-a) + a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b} - \bar{a}}$$

Verificare che nel caso in cui a e b giacciono sulla circonferenza unitaria, la precedente diventa

$$p' = a + b - ab\bar{p}$$

Esercizio 33. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ due numeri complessi distinti che giacciono sulla circonferenza unitaria e tali che $a \neq -b$. Dimostrare che le tangenti in a e b alla suddetta circonferenza si intersecano nel punto

$$p = \frac{2}{\bar{a} + \bar{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Esercizio 34 (Napoleone)**.** Su ognuno dei lati di un triangolo ABC viene costruito, esternamente ad ABC, un triangolo equilatero. Dimostrare che i loro tre centri formano a loro volta un triangolo equilatero.

Esercizio 35 (Teorema di Vecten)**.** Sia ABC un triangolo e su ognuno dei suoi lati si costruisca un quadrato, esternamente al triangolo stesso. Sia O_A, O_B, O_C i centri dei quadrati costruiti sui lati BC, AC, AB rispettivamente. Si mostri che $AO_A \perp O_B O_C$.

Stage Senior 2021- eserciziario G2 basic

Omotetie

Esercizio 1. Siano Γ e ω due circonferenze tangenti internamente in T, con ω all'interno di Γ. Sia AB una corda di Γ tangente a ω in K. Mostrare che TK è la bisettrice di ATB.

Esercizio 2. Sia ABC un triangolo, ω la circonferenza inscritta tangente in D a BC e I l'incentro. Sia inoltre M il punto medio di BC, T il simmetrico di D rispetto ad I e P il simmetrico di D rispetto a M.

- Mostrare che A, T e P sono allineati.
- Sia I_A l'excentro opposto al vertice A e Q il simmetrico di P rispetto a I_A. Mostrare che A, I, I_A sono allineati, come anche A, D, Q.
- Sia N il punto medio dell'altezza uscente da A su BC. Mostrare che L, I, P e L, D, I_A sono allineati

Esercizio 3. Siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ tre circonferenze con un punto S in comune. Sia inoltre ABC il triangolo formato dalle tre tangenti esterne comuni e siano I, O rispettivamente l'incentro e il circocentro di ABC. Allora S, I, O sono allineati.

Esercizio 4. IMO 2014 - 4 I punti P e Q giacciono su lato BC di un triangolo ABC con $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. I punti M ed N giacciono sulle rette AP e AQ rispettivamente, tali che P sia il punto medio di AM e Q il punto medio di AN. Sia Z l'intersezione di BM e CN. Mostrare che Z sta sulla circoscritta ad ABC.

Inversione

Esercizio 5. Nella configurazione dell'esercizio 1, sia M il punto medio dell'arco AB che non contiene T. Ridimostrare l'esercizio 1 invertendo in M. Dedurne che $MA^2 = \text{pow}_\omega(M)$.

Esercizio 6. Provare le seguenti inversioni:

- Sia ABC un triangolo di ortocentro H e piedi delle altezze D, E, F (da A, B, C rispettivamente). Invertire di centro A e raggio $\sqrt{AH \cdot AD}$). Dove vanno i 7 punti?
- Sia ABC un triangolo con inscritta ω che tange BC, CA, AB in D, E, F rispettivamente. Dove finisce la circoscritta ad ABC se inverto rispetto a ω?
- ABC triangolo di circocentro O e siano B^*, C^*, O^* le immagini di B, C, O dopo un'inversione di centro A e raggio 1. Che relazione c'è tra A, B^*, C^* e O^*?

Esercizio 7. Siano ω_i $i = 0, 1, 2, 3$ 4 circonferenze con ω_i tangente esternamente a ω_{i-1} e a ω_{i+1} (indici presi modulo 4). Siano A, B, C, D i quattro punti di tangenza. Mostrare che $ABCD$ è ciclico.

Esercizio 8. Sia ABC un triangolo con $\angle C = \pi/2$ e siano X, Y su CA e CB rispettivamente. Considero le 4 circonferenze di centri A, B, X, Y passanti per C e siano P, Q, R, S i punti di intersezione tra coppie di queste circonferenze (diversi da C). Mostrare che $PQRS$ è ciclico.

Esercizio 9. Teorema di Tolomeo Sia $ABCD$ un quadrilatero, allora $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$ e vale l'uguaglianza se e solo se $ABCD$ è ciclico.

Esercizio 10. Lemma della simmediana Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza γ. Le tangenti a γ in B e C si intersecano in P. Mostrare che AP è simmediana relativa a BC, ovvero la simmetrica della mediana relativa a BC rispetto alla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

Esercizio 11. Teorema di Feuerbach Sia ABC un triangolo, ω, ω_A rispettivamente la sua inscritta e la sua $A-$exinscritta. Sia D il punto di tangenza di ω con BC, M il punto medio di BC, I il piede della bisettrice da A e H il piede dell'altezza da A.

- Mostrare che $MD^2 = MI \cdot MH$.
- Sia ω_F la circonferenza di Feuerbach di ABC e r la sua tangente in M. Trovare l'angolo fra r e la retta BC. (*Hint: fare angle-chasing passando per* HNC *con* N *punto medio di* AC)
- Considerare un'inversione di centro M e raggio MD. Dove finiscono ω, ω_F e ω_A?
- Dedurne che la circonferenza di Feuerbach tange inscritta e le tre exinscritte

Problemi vari

Esercizio 12. Russia 2009 Sia ABC un triangolo e Ω la sua circoscritta. La bisettrice dell'angolo $\angle BAC$ interseca BC in D e Ω in E. La circonferenza di diametro DE interseca Ω in F. Mostrare che AF è la simmediana.

Esercizio 13. Polonia 2000 Sia ABC un triangolo con $AC = CB$ e P un punto interno tale che $\angle PAB = \angle PBC$. Mostrare che $\angle APM + \angle BPC = \pi$.

Esercizio 14. IMOSL 2013 - G2 Sia ABC un triangolo e ω la sua circonferenza circoscritta. Sia M il punto medio di AB, N il punto medio di AC, T il punto medio dell'arco BC di ω che non contiene A. La circonferenza circoscritta al triangolo AMT interseca l'asse di AC in un punto X interno al triangolo ABC. La circonferenza circoscritta al triangolo ANT interseca l'asse di AB in un punto Y interno al triangolo ABC. Le rette MN e XY si intersecano in K. Dimostrare che $KA = KT$.

Esercizio 15. EGMO 2016 - 4 Due circonferenze aventi lo stesso raggio, ω_1 e ω_2, si intersecano in due punti distinti X_1 e $X2$. Si consideri una circonferenza ω tangente esternamente a ω_1 nel punto T_1 e internamente a ω_2 nel punto T_2. Si dimostri che il punto d'intersezione fra le rette X_1T_1 e X_2T_2 giace su ω.

Esercizio 16. Allenamenti EGMO 2019 - G6 Dato il triangolo ΔABC consideriamo ω_B la circonferenza passante per A, B e tangente in A al lato AC e, simmetricamente, ω_C la circonferenza passante per A, C e tangente in A al lato AB. Sia D il punto di intersezione di ω_B e ω_C, e sia E il punto sulla retta AD tale che $AD = DE$. Dimostrare che E sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo ΔABC.

Esercizio 17. Senior 2013 - TF Sia ΔABC un triangolo. Sia D l'ulteriore intersezione tra la circonferenza passante per C e tangente alla retta AB in A e la circonferenza passante per B e tangente alla retta AC in A. Sia E il punto sulla retta AB (diverso da A) tale che $BA = BE$. Sia F l'ulteriore intersezione tra la retta AC e la circonferenza circoscritta al triangolo ΔADE. Dimostrare che $AC = AF$.

Esercizio 18. Iran 1996 Sia ω un semicerchio di diametro AB e centro O. Una retta interseca ω in C e D e la retta AB in M, tali che $MC > MD$, $MB < MA$. Sia K il secondo punto di intersezione delle circoscritte a AOC e BOD diverso da O. Mostrare che $MK \perp KO$.

Esercizio 19. IMOSL 2011 - G4 Sia ΔABC un triangolo acutangolo e Γ la sua circonferenza circoscritta. Sia B_0 il punto medio di AC e C_0 il punto medio di AB. Sia D il piede dell'altezza da A su BC e sia G il baricentro di ABC. Sia ω la circonferenza passante per B_0, C_0 e tangente a Γ in un punto $X \neq A$. Dimostrare che D, X, G sono allineati.

Hints

10 Inversione in A di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria rispetto alla bisettrice uscente da A.

15 Inversione in X_1

16 Inversione in A

17 Inversione in A

18 Inversione + Feuerbach

Stage Senior 2021- eserciziario G2 basic

Esercizio 1. Sia ABC un triangolo, H il suo ortocentro, M su AB ed N su AC. Siano P e Q i punti di intersezione tra le circonferenze di diametro BN e CM. Mostrare che P, Q, H sono allineati.

Esercizio 2. Sia AB una corda della circonferenza Γ ed M il punto medio dell'arco AB. Due semirette uscenti da M intersecano la corda AB in P, Q e Γ in R, S. Mostrare che P, Q, R, S ciclico.

Esercizio 3. BAMO 2012 - 4 Sia AB un segmento nel piano ed M un suo punto interno. I due triangoli equilateri AMC e BMD sono costruiti dallo stesso lato rispetto ad AB. Sia N il secondo punto di intersezione (diverso da M) tra le circoscritte a AMC e BMD. Mostrare che N sta su AD e BC e che al variare di M, le rette MN passano per un fissato punto K del piano.

Esercizio 4. Sia ABC scaleno e D, E, F i piedi delle altezze e O il circocentro. Sia ω_A la circonferenza per A, D, O e analogamente siano definite ω_B, ω_C. Mostrare che $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ concorrono in un punto $X \neq O$

Esercizio 5. Asse ortico Sia ABC un triangolo, D, E, F i piedi delle altezze. Siano P l'intersezione tra EF e BC, Q l'intersezione tra FD e AC, R l'intersezione tra ED e AB. Mostrare che P, Q, R giacciono su una retta perpendicolare alla retta di Eulero.

Esercizio 6. Iran TST 2011 - 1 Sia ABC un triangolo acuto, M il punto medio di BC ed E e F i piedi delle altezze da B e C. Siano K ed L i punti medi di ME e MF, rispettivamente e sia T sulla retta KL tale che TA è parallelo a BC. Mostrare che $TA = TM$.

Esercizio 7. Polish MO 2018 - 5 Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB \neq AC$ e siano E, F i piedi delle altezze su AC e AB. La tangente in A alla circoscritta interseca BC in P. La retta parallela a BC passante per A interseca EF in Q. Dimostrare che PQ è perpendicolare alla mediana passante per A del triangolo ABC.

Esercizio 8. IMO 2008 - 1 Sia ABC un triangolo di ortocentro H e Γ_A la circonferenza centrata nel punto medio di BC e passante per H. Siano A_1 e A_2 le intersezioni di Γ_A con BC. Si costruiscano in modo analogo B_1, B_2, C_1, C_2. Mostrare che $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sono conciclici.

Esercizio 9. Hong Kong 1998 Sia $PQRS$ un quadrilatero ciclico con $\angle PSR = 90°$ e siano H, K i piedi delle altezze da Q su PR e PS. Mostrare che HK biseca QS.

Esercizio 10. Sia ABC un triangolo di incentro I. Mostrare che i circocentri di IAB, IBC, ICA giacciono su una circonferenza avente centro coincidente con il circocentro di ABC.

Esercizio 11. Mostrare che il punto di Nagel N, l'incentro I e il baricentro G sono allineati, con $GN = 2IG$.

Esercizio 12. Bulgaria 2011 Sia O un punto interno al triangolo ABC e D, E, F le sue proiezioni su BC, AC, AB. La perpendicolare a EF per A e la perpendicolare a DF per B si incontrano in P. Sia H la proiezione di P su AB. Mostrare che H, D, E, F è ciclico.

Esercizio 13. USA TST 2011 - 1 Sia ABC un triangolo acutangolo e siano D, E, F i piedi delle altezze. Sia H l'ortocentro di ABC. P, Q giacciono su E, F tali che $AP \perp EF$ e $HQ \perp EF$. Sia R l'intersezione tra DP e QH. Trovare HQ/HR.

Esercizio 14. Sia $ABCV$ un tetraedro e siano M_A, M_B ed M_C i punti medi degli spigoli AV, BV e CV rispettivamente. Siano inoltre H, K, L gli ortocentri delle facce ABV, BCV, CAV. Mostrare che se H, K, L sono allineati, allora il centro della sfera circoscritta al tetraedro sta sul piano $M_AM_BM_C$.

N1 Basic - Esercizi

(1) Calcolare la classe di resto $\pmod p$ della somma dei residui quadratici modulo p.

(2) Siano k e n interi positivi tali che $k \mid 2^{2^n}+1$. Mostrare che $2^{n+1} \mid k-1$.

(3) Trovare tutti gli $n \in \mathbb{Z}_+$ tali che $a^{n+1} \equiv a \pmod n$ $\forall\, a \in \mathbb{Z}$.

(4) Esibire 8 generatori modulo 17.

(5) Mostrare che non esistono generatori modulo pq con p, q primi dispari distinti.

(6) (i) Risolvere l'equazione

$$(x^2+2x-4)(x^2+7x+1) \equiv 0 \pmod p$$

per $p = 11$ e $p = 17$.

(ii) Dimostrare che, se p è un primo dispari qualsiasi, il numero di soluzioni dell'equazione, contate con molteplicità, è multiplo di 4.

(7) Sia p un primo. Mostrare che $n^p \equiv n \pmod p$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (FLT) per induzione su n.

(8) Dimostrare il teorema di Wilson, cioè che $1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod p$, utilizzando l'esistenza di un generatore modulo p.

(9) Un intero positivo x è detto "n-speciale" se esiste k tale che $kx \mid x^n + k$. Trovare tutti i numeri 2021-speciali.

(10) Sia $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = \frac{m}{n}$ con $(m, n) = 1$. Mostrare che $p \mid m$.

(11)

$$\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n \text{ termini}} \equiv \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n-1 \text{ termini}} \pmod n.$$

(12) Trovare tutti gli interi coprimi con ciascun termine della successione $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ con $n \in \mathbb{Z}_+$.

(13) Sia p un primo. Dimostrare che esiste un intero positivo $x < \sqrt{p} + 1$ che non è un residuo quadratico modulo p.

(14) Siano $n \geq m$ interi positivi. Mostrare che

$$\frac{\gcd(m, n)}{n} \binom{n}{m} \in \mathbb{N}$$

(15) (i) Mostrare che

$$\gcd(m^a - 1,\ m^b - 1) = m^{\gcd(a,b)} - 1$$

(ii) Concludere che $n \mid \phi\left(2^n - 1\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$.

(16) Sia p un primo. Trovare il massimo grado $n < p$ tale che esista $T(x) \in \mathbb{F}_p(x)$ che rispetta la seguente proprietà: per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$

$$T(n) \equiv T(m) \pmod p \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv m \pmod p.$$

(17) (i) Siano a, b, c, d interi positivi tali che $ab = cd$. Mostrare che esistono p, q, r, s interi positivi tali che $a = pq,\ b = rs,\ c = pr\ , d = ps$.

(ii) Dati a, b, c, d come sopra si mostri che $a + b + c + d$ non può essere primo.

(18) Calcolare modulo p la quantità

$$\prod_{m=1}^{p-1} (1 + m^2)$$

(19) (i) Mostrare che, dato n un intero positivo, esistono n naturali consecutivi nessuno dei quali è una potenza perfetta di un numero primo.

(ii) Mostrare che esistono n naturali consecutivi nessuno dei quali è una potenza perfetta (con esponente maggiore di 2).

(20) Dimostrare che esiste un intero positivo n con esattamente 2021 fattori primi distinti e tale che $n \mid 2^n + 1$.

(21) Trovare per quali n interi positivi si ha che $n^2 \mid 2^n + 1$.

HINTS:

(2) E' sufficiente analizzare il caso k primo!

(9) Provare a dimostrare che se x è "n-speciale" allora è anche "$n-1$-speciale".

(12) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$.

(18) Calcolare una scrittura equivalente modulo p del polinomio $f(x) = \prod_{m=1}^{p-1}(x-m)$. Si può vedere l'espressione del problema in termini di questo polinomio?

(19) Teorema cinese del resto? Cercare una condizione modulo qualcosa che possa garantire la tesi.

(20) Provare a ragionare per induzione sul numero di fattori primi distinti di n (in particolare è utile generalizzare la tesi inserendo k al posto di 2021, con $k \geq 1$ intero qualsiasi).

(21) Chi può essere il più piccolo primo che divide n? Può esserci un "secondo più piccolo primo" che divide n?

Foglio di esercizi di N2 Basic

Diofantee polinomiali

1. Per ciascuna delle seguenti equazioni, determinare tutte le coppie di interi (x, y) che soddisfano la soddisfano:

$$7x + 5y = 1$$
$$37x + 52y = 1$$
$$35x + 27y = 22.$$

2. Per ciascuna delle seguenti equazioni, determinare tutte le coppie di interi (x, y, z) che soddisfano la soddisfano:

$$2x + 3y + 5z = 7$$
$$7x + 11y - 21z = 1$$

3. Determinare tutte le soluzioni intere (m, n) delle equazioni

$$n^2 - 6n - 5 = m^2 + m - 17$$
$$2n^2 + 2m^2 + m = 5nm + 5n + 3.$$

4. Determinare tutte le soluzioni intere (x, y) delle equazioni

$$3y^2 = x^2 + x + 1$$
$$3y^2 = 2x^2 + x + 1$$

5. Determinare tutte le terne di interi (x, y, z) che soddisfano l'equazione

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3.$$

6. Determinare tutte le quaterne di interi (x, y, z, w) tali che

$$x^2 + y^2 = 7z^2 + 7w^2.$$

7. Determinare il minimo n tale che esistono numeri razionali $a_1, \dots, a_n$ tali che

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 7.$$

Potenze

8. Determinare tutte le coppie di interi non negativi (a, b) tali che

$$3^a - 2^b = 1.$$

9. Determinare tutte le coppie (x, y) di interi nonnegativi che soddisfano l'equazione

$$7^x - 3^y = 4$$

10. Determinare tutte le coppie di interi non negativi (a, x) tali che

$$x^3 + 1 = 3^a.$$

Dimostrare anche che non ci sono soluzioni intere all'equazione

$$x^n + 1 = 3^a$$

se $n > 1$ è un intero diverso da 3.

11. Determinare tutte le terne (x, y, z) di interi positivi che soddisfano l'equazione

$$(x + y)(1 + xy) = 2^z.$$

Disuguaglianze

12. Determinare tutti gli interi positivi n tali che

$$8n^3 + 27n^2 + 14n + 11$$

è un cubo perfetto.

13. Determinare tutti gli interi a tali che l'equazione

$$x^4 - ax + 2a - 2 = 0$$

ammetta almeno una soluzione intera.

14. Dimostrare che, per ogni intero n, esistono al più solo un numero finito di coppie di interi (x, y) tali che

$$x^6 - yx^5 + 11(x^5 - yx^4) + 22(x^4 - yx^3) + 33(x^3 - yx^2) + 44(x - 2y) = n.$$

15. Determinare tutti le terne di interi (a, b, c) tali che, per ogni intero $n > 0$, esiste un intero $k > 0$ tale che

$$a^n + 2b^n + 3c^n = k^{n+1} + 1.$$

16. Mostrare che non esiste alcun intero positivo k per cui l'equazione

$$(n - 1)! + 1 = n^k$$

abbia soluzione con $n > 5$.

17. Determinare le coppie (x, y) di interi che soddisfano

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

18. Siano (a, b, c) e (p, q, r) due terne di interi positivi tali che

$$a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p = a^r + b^p + c^q.$$

Dimostrare che $a = b = c$ oppure $p = q = r$.

Stage Senior 2021- eserciziario A1 medium

Congruenze tra polinomi e derivate

Esercizio 1. Determinare il resto della divisione tra il polinomio $x^{2020}+x^9+x^7+2x^6$ e il polinomio $x^4+x^3+x^2+x+1$

Esercizio 2. Sia $n>1$ un intero positivo, dimostrare che $n^{2021}+n+1$ non è primo.

Esercizio 3. Sia $k \equiv 1 \ (mod\ 6)$. Dimostrare che $(x+1)^k - x^k - 1$ è diviso da $(x^2+x+1)^2$
(Sapendo questo fatto, si può provare $USATST$ 2017 6)

Esercizio 4. Determinare se esistono due polinomi a coefficienti reali $p(x), q(x)$ tali che

$$p(x)^3 - q(x)^2 = 2x+1$$

Esercizio 5. Siano $p(x), q(x)$ due polinomi a coefficenti reali tali che essi abbiano le stesse radici (eventualmente con diverse molteplicità) e tali che per i polinomi $p(x)+1, q(x)+1$ avvenga lo stesso. Dimostrare che $p(x) = q(x)$

Esercizio 6. Se due polinomi $p(x), q(x)$ sono scritti alla lavagna, allora possiamo scrivere alla lavagna:
$p(x)+q(x), p(x)-q(x), p(x)q(x), p(q(x)), kp(x)$ dove k è una costante reale qualsiasi.
Partendo dai polinomi x^3-3x^2+5, x^2-4x è possibile scrivere un polinomio della forma x^n-1 per un certo n intero positivo,dopo un numero finito di passi?

Differenze finite

Esercizio 7. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n con coefficiente direttivo a_n tale che $p(x)$ è intero e multiplo di un certo intero positivo m se x è intero. Dimostrare che $n!a_n$ è intero e multiplo di m

Esercizio 8. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n tale che per ogni $i = 0, 1, 2...., n$, $P(i)$ è pari al resto di i diviso per 2. Determinare $p(n+1)$

Esercizio 9. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n tale che per ogni $i = 1, 2...., n, n+1$, $P(i) = \frac{1}{i}$. Determinare $p(n+2)$

Esercizio 10. Siano $n > m$ due interi positivi. Dimostrare che :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{n-k} (2k+1)^{2m+1} = 0$$

Problemi vari

Esercizio 11. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi di grado n e sia k un intero positivo. Definito $Q(x) = p(p(...p(p(x))..))$ dove $p(x)$ è composto k volte, mostrare che esistono al più n interi t tali che $Q(t) = t$

Esercizio 12. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado $n > 1$. Dimostrare che se $p(p(p(x))) - p(x)$ ha n^3 radici reali distinte, esse possono essere divise in due gruppi con la stessa media aritmetica

Esercizio 13. Trovare tutti i polinomi a coefficienti reali $p(x)$ per cui esiste un polinomio $q(x)$ a coeffficienti reali tale che, per ogni intero positivo n, valga:

$$p(1)+p(2)+p(3)..+p(n) = p(n)q(n)$$

Esercizio 14. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali tali che, per ogni x reale, valga $p(x) \geq 0$. Dimostrare che esistono due polinomi a coefficienti reali $a(x), b(x)$ per cui $p(x) = a(x)^2 + b(x)^2$

Stage Senior 2021- eserciziario A2 medium

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi tali che $xyz = 1$ vale:

$$x + y + z \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Esercizio 2. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi tali che $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$vale:

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 64$$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni x, y, z reali ,non negativi ,minori di 1 vale:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{1 + y + z} + (1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 1$$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi tali che $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \leq x + y + z$ vale:

$$\frac{1}{x^2 + y + z} + \frac{1}{y^2 + z + x} + \frac{1}{z^2 + x + y} \leq 1$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi tali che $xy + xz + yz = 3$ vale:

$$\frac{1}{4 + (x + y)^2} + \frac{1}{4 + (y + z)^2} + \frac{1}{4 + (z + x)^2} \leq \frac{3}{8}$$

Esercizio 6. Siano a, b, c, d reali non negativi tali che $a + b + c + d = 4$. Dimostrare che:

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}$$

Esercizio 7. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi vale:

$$\sum_{cyc} \frac{x^3 + 5y^3}{3x + y} \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Esercizio 8. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi tali che $x + y + z = 3$ vale:

$$18 \sum_{cyc} \frac{1}{(3 - z)(4 - z)} + 2(xy + yz + xz) \geq 15$$

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni x, y, z reali positivi vale:

$$\sum_{cyc} \frac{(z + y - x)^2}{x^2 + (y + z)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Esercizio 10. Trovare tutte le liste$(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ di interi che soddisfano le seguenti proprietà : 1)$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$; 2)$x_{2020} \leq x_1 + 1$; 3)esiste una permutazione $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ di $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tale che

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Esercizio 11. Siano a, b, c reali positivi tali che $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = a + b + c$. Dimostrare che:

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

Esercizio 12. I numeri reali a, b, c, d sono tali che $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Mostrare che

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

Esercizio 13. Determinare il minimo di

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4}$$

dati a, b, c, d reali non negativi tali che $a + b + c + d = 4$.

Stage Senior 2021- eserciziario A3 medium

Esercizio 1. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che, per ogni coppia di interi a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Esercizio 2. Determinare tutte le funzioni iniettive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che, per ogni intero positivo n:

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

Esercizio 3. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che :

$$f(x + y^2) \geq (y^2 + 1)f(x)^2$$

per ogni x, y reali

Esercizio 4. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

valga per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 5. Determinare tutte le funzioni $f : (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ tali che

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per ogni w, x, y, z, reali positivi che soddisfano $wx = yz$.

Esercizio 6. Determinare se esiste una sequenza infinita $a_1, a_2, a_3, \dots$ di interi positivi che soddisfano

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

per ogni intero positivo n.

Esercizio 7. Determinare tutte le coppie (f, g) dall'insieme dei numeri reali in se stesse tali che

$$g(f(x + y)) = f(x) + (2x + y)g(y)$$

valga per ogni coppia di numeri reali x e y.

Esercizio 8. Determinare tutte le funzioni di $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ che soddisfano

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$

Esercizio 9. Determinare tutte le funzioni di $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ che soddisfano:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$

Esercizio 10. Sia $a_0, a_1, a_2, \dots$ una sequenza di interi e sia $b_0, b_1, b_2, \dots$ una sequenza di interi positivi tali che: $a_0 = 0, a_1 = 1$,e

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n b_n + a_{n-1} & \text{if } b_{n-1} = 1 \\ a_n b_n - a_{n-1} & \text{if } b_{n-1} > 1 \end{cases} \qquad \text{for } n = 1, 2, \dots.$$

per $n = 1, 2, \dots$.Dimostrare che almeno uno tra a_{2021} and a_{2022} è maggiore o uguale a 2021.

Esercizio 11. Determinare tutte le funzioni f dall'insieme degli interi positivi in se stesse tali che ,per ogni coppia di interi positivi a e b, esiste un triangolo non degenere con lati:

$$a, f(b) \text{ e } f(b + f(a) - 1).$$

Esercizio 12. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tali che, per tutti gli interi a, b, c che soddisfano $a+b+c = 0$, vale:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Esercizio 13. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ soddisfa l'equazione

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{f(n)\text{ volte}}(n)\dots)) = \frac{n^2}{f(f(n))}$$

per ogni intero positivo n. Determinare i possibili valori di $f(1000)$

Esercizio 14. Determinare tutte le funzioni $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tali che per ogni $x, y \in (0, \infty)$

$$f(x + y) \geq f(x) + yf(f(x))$$

Esercizio 15. Determinare tutte le funzioni $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tali che per ogni $x, y \in (0, \infty)$,

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)\left(f(f(x^2)) + f(f(y^2))\right).$$

Esercizio 16. Supponiamo che la sequenza $a_1, a_2, \dots$ di reali positivi soddisfi :

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

per ogni intero positivo k. Dimostrare che $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ per ogni intero $n \geq 2$.

Esercizio 17. Sia n un intero positivo e consediamo la sequenza $a_1, a_2, \cdots, a_n$ di interi positivi. Estendiamola periodicamente ad una sequenza infinita $a_1, a_2, \cdots$ definendo $a_{n+i} = a_i$ per ogni $i \geq 1$. Se

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$$

e

$$a_{a_i} \leq n + i - 1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

Mostrare

$$a_1 + \cdots + a_n \leq n^2.$$

Esercizio 18. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

per ogni numeri reali x e y.

Esercizio 19. Sia $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa le seguenti proprietà:
(i) per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, vale $f(x)f(y) \geq f(xy)$
(ii) per ogni $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$, vale $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$
(iii) esiste un numero razionale $a > 1$ tale che $f(a) = a$
Dimostrare che $f(x) = x$ per tutti gli $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Esercizio 20. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che soddisfano

$$f\big(f(m) + n\big) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

per tutti gli interi m e n.

Esercizio 21. Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano l'equazione

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

per tutti i numeri reali x e y.

Esercizio 22. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che :

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

per ogni x, y reali. Dimostrare che $f(x) = 0$ se $x \leq 0$

Stage Senior 2021- eserciziario C1 medium

Esercizio 1. Il piano è diviso in varie regioni da n rette non parallele, dimostrare che possiamo colorare in bianco e nero queste regioni in modo tale che due regioni confinati sono di colore diverso.

Esercizio 2. Dimostrare che se un poligono convesso A è interno ad un poligono convesso B,allora il perimetro di A è minore di quello di B.

Esercizio 3. Dati 9 punti interni in un quadrato di area 1,dimostrare che 3 di essi formano un triangolo di area al più $\frac{1}{8}$

Esercizio 4. Sia S un insieme di 2020 punti distinti nel piano. Sia

$$M = \{P : P \text{ è il punto medio di } XY \text{ per una coppia distinta di punti } X, Y \text{ in } S\}.$$

Determinare il numero minimo di punti in M.

Esercizio 5. Siano $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ una permutazione dei vertici di un 2n-gono. Dimostrare che due dei segmenti P_iP_{i+1} sono paralleli dove $P_{2n+1} = P_1$.

Esercizio 6. Determinare se esiste un insieme S di 100 punti distinti nel piano tali che il baricentro di 10 qualsiasi di essi sia ancora in S

Esercizio 7. Ci sono 2019 punti in un dato piano. Un ragazzo disegna k circonferenze in modo tale che, per ogni due punti distinti esiste una circonferenza che contiene almeno uno dei due. Quale è il minimo k, per cui, per ogni configurazione iniziale; è possibile disegnare k cerchi con la proprietà sopra citata?

Esercizio 8. Una collezione di n quadrati si dice triconnessa se le seguenti proprietà sono soddisfatte: (i)Tutti i quadrati sono uguali (ii) Se due quadrati hanno un punto P in comune, allora P è vertice di ognuno dei due quadrati.. (iii) Ogni quadrato tocca esattamente 3 quadrati. Determinare per quali $2018 \leq n \leq 3018$ esiste una collezione di n quadrati triconnessa.

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni intero positivo n esiste un poligono (non necessariamente connesso) che non ha 3 vertici allineati,che ammette esattamente n triangolazioni.

Esercizio 10. Sono date 2017 rette nel piano, a tre a tre non concorrenti. Una lumachina si trova inizialmente in un punto che appartiene a una sola delle rette e da lì inizia a strisciare lungo le rette nella maniera seguente: si muove su una data retta finché non raggiunge un'intersezione. Arrivata all'intersezione, prosegue il suo viaggio sull'altra retta girando a sinistra o a destra, alternando la sua scelta ad ogni punto d'intersezione che incontra. I punti d'intersezione sono gli unici in cui la lumachina può cambiare direzione. È possibile che vi sia un segmento che, nel corso del viaggio, la lumachina attraversa in entrambe le direzioni?

Esercizio 11. Sia S un insieme finito di punti nelle spazio tri-dimensionale. Siano S_x, S_y, S_z gli insiemi che consistono nelle proiezioni ortogonali dei punti di S nei piani yz-piano, zx-piano, xy-piano, rispettivamente. Dimostrare che

$$|S|^2 \leq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

dove $|A|$ denota il numero di punti nell'insieme finito A.

Esercizio 12. Sono dati $n > 2$ segmenti nel piano tali che due segmenti qualunque si tagliano in un punto diverso dagli estremi, e non ci sono tre segmenti con un punto in comune. Per ogni segmento, Ludo deve scegliere un estremo e piazzarci una rana rivolta verso l'altro estremo. Dopo batterà le mani $n-1$ volte. Ad ogni battito di mani, ogni rana salterà immediatamente in avanti fino al successivo punto di intersezione sul suo segmento. Le rane non cambiano mai la direzione dei loro salti. Ludo vuole piazzare le rane in maniera tale che non ci sia mai più di una rana in ogni punto di intersezione. (a) Dimostrare che Ludo può sempre realizzare il suo desiderio se n è dispari. (b) Dimostrare che Ludo non può mai realizzare il suo desiderio se n è pari.

Esercizio 13. Un piano ha un punto speciale O chiamato origine. Sia P un insieme di 2021 punti nel piano tali che (i) non ci sono tre punti in P appartenenti ad una stessa retta e (ii) non ci sono due punti in P appartenenti ad una retta per l'origine. Un triangolo con vertici in P è grasso se O è strettamente contenuto dentro il triangolo. Determinare il massimo numero di triangoli grassi.

Esercizio 14. Definiamo nel piano cartesiano un punto con coordinate intere se entrambe le sue coordinate sono intere. Un poligono si dice speciale se ha tutti i vertici a coordinate intere. Dimostrare che dato un poligono speciale A esso è contenuto in un poligono speciale B in modo tale che tutti i vertici di A stiano nel perimetro di B,ed esattamente un vertice di B non è vertice di A

Esercizio 15. Sia $n > 1$ un intero .Supponiamo siano dati $2n$ punti nel piano tali che non ci sono 3 punti allineati . I punti sono indicati $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ in un certo ordine. Consideriamo ora i $2n$ angoli

$$\angle A_1A_2A_3, \angle A_2A_3A_4, \ldots, \angle A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}, \angle A_{2n-1}A_{2n}A_1, \angle A_{2n}A_1A_2$$

Per ogni angolo consideriamo sempre la sua ampiezza minore(quella tra $0°$ e $180°$). Dimostrare che esiste un modo di ordinare i punti in modo tale che i $2n$ angoli possono essere partizionati in due gruppi in modo tale che la somma degli angoli in un gruppo sia uguale a quella dell'altro.

.

Esercizi C2 Medium

Massimiliano Foschi

9 settembre 2021

I seguenti problemi sono applicazioni di double counting, pigeonhole, metodo probabilistico e induzione. Tra parentesi è indicata la difficoltà in una scala da 1 a 5.

1. (1) Sia X un insieme di n elementi e siano $S_1, S_2, \ldots, S_m$ suoi sottoinsiemi di 3 elementi tali che ogni elemento di X appartenga a esattamente 3 di essi. Dimostrare che $m = n$.

2. (2) A una gara di matematica hanno partecipato 200 studenti. Ciascuno dei sei problemi è stato risolto da almeno 101 studenti. Dimostrare che ci sono almeno due studenti tali che ogni problema sia stato risolto da almeno uno di loro due.

3. (3) In un concorso ci sono a partecipanti e b esaminatori, dove $b \geq 3$ è un numero dispari. Per ogni partecipante, un esaminatore può votare per la promozione o la bocciatura. Sia k un intero tale che ogni coppia di giudici ha concordato su al più k studenti. Dimostrare che
$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

4. (3) Sia S un insieme di n punti a tre non allineati. Sia k un intero positivo tale che, per ogni punto $P \in S$, esistono k punti di S equidistanti da P. Dimostrare che
$$k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

5. (4) Sia n un intero coprimo con 6. I vertici di un n-agono regolare sono colorati di giallo, rosso e blu, in modo che ci sia un numero dispari di vertici di ciascun colore. Dimostrare che esiste un triangolo isoscele i cui tre vertici hanno colori diversi.

6. (4) Le caselle di una tabella 999 per 999 sono colorate di bianco o di rosso. Sia T il numero di terne di caselle (C_1, C_2, C_3) tali che le prime due appartengano alla stessa riga, le seconde due alla stessa colonna, C_1 e C_3 siano bianche, C_2 rossa. Determinare il massimo valore che può assumere T.

7. (4) Determinare tutti gli interi positivi n tali che gli elementi dell'insieme $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ possono essere colorati con due colori in modo che esistano esattamente 2007 terne ordinate (x, y, z) tali che $x + y + z$ sia multiplo di n e x, y e z abbiano lo stesso colore.

8. (4) Una circonferenza è divisa da 432 punti in 432 archi congruenti. I punti sono colorati di quattro colori diversi in modo che ce ne siano 108 di ciascun colore. Dimostrare che si possono scegliere tre punti di ciascun colore in modo che i quattro triangoli che si vengono a formare siano congruenti.

9. (3) Sia p un numero primo e siano $a_1, a_2, \ldots, a_p$ interi. Dimostrare che esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che
$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$
producano almeno $\frac{p}{2}$ resti modulo p.

10. (3) Un grafo completo ha 60 vertici. Per ogni arco viene fissato un verso. Dimostrare che esistono due quaterne disgiunte di vertici, tali che tutti gli archi che le collegano vadano dalla prima verso la seconda.

11. (4) Sia S un insieme di punti del piano a tre a tre non allineati. Per ogni poligono convesso P a vertici in S, sia $a(P)$ il numero di vertici di P e $b(P)$ il numero di punti di S che non appartengono a P. Si assume che un segmento, un punto e l'insieme vuoto siano poligoni di 2, 1 e 0 vertici. Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1.$$

12. (1) Sia $p_k(n)$ il numero di permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$ con esattamente k punti fissi. Dimostrare che
$$\sum_{k=0}^{n} k p_k(n) = n!$$

13. (1) Sia S l'insieme dei numeri razionali in $(0, 1)$ che, quando sono scritti in base 10, hanno un periodo di 3 cifre distinte. Determinare la somma degli elementi di S.

14. (2) Dimostrare che esiste un grafo completo diretto con più di 2021 nodi tale che per ogni sottoinsieme di 2021 nodi esiste un nodo w non appartenente a tale sottoinsieme per cui tutti gli archi che lo congiungono con uno di quei nodi sono diretti verso di esso.

15. (3) Sia N un intero positivo e sia $S = \{0, 1, 2, \ldots, N^2 - 1\}$. Sia A un sottoinsieme di S con esattamente N elementi. Dimostrare che esiste un sottoinsieme B di S con esattamente N elementi tale che, per almeno metà degli elementi x di S, esistono $a \in A$ e $b \in B$ per cui $a + b = x$.

16. (4) Siano $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numeri complessi con $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1$. Dimostrare che esiste una scelta di $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in -1, +1$ tale che

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k z_k \right| \leq 1.$$

17. (5) Alberto e Barbara giocano a un gioco. Innanzitutto, Alberto sceglie un insieme finito S di punti interi nel piano cartesiano. Dopodiché, per ogni retta l orizzontale, verticale o parallela a una delle bisettrici dei quadranti, Alberto rivela a Barbara quanti punti di S giacciono su tale retta. Dimostrare che, se S è della forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid m < x^2 + y^2 < n\}$$

per qualche m e n, allora Barbara può determinarlo. (Nota: Barbara non sa in anticipo che S è di questa forma.)

18. (2) Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ tali che $(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n(n+1)$ per ogni intero positivo n.

19. (3) Sia $a_1, a_2, \ldots$ una successione di reali tale che, per ogni i e j interi positivi, $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Dimostrare che, per ogni n intero positivo,

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

20. (3) Dimostrare che per ogni intero N esiste un intero $n > N$ tale che esistano due insiemi A e B di interi positivi di cardinalità n tali che, per ogni $x \in \mathbb{N}$, il numero di modi in cui x può essere scritto come somma di due elementi distinti di A è pari al numero di modi in cui può essere scritto come somma di elementi distinti di B.

21. (3) Alberto e Barbara fanno un gioco. All'inizio vengono scritti due numeri interi positivi sulla lavagna. Inizia Alberto e i turni si alternano. Durante un turno, se $x \geq y$ sono i due numeri sulla lavagna, si può sostituire x con un intero non negativo $z < x$ congruo a x modulo y. Chi scrive per primo 0 perde. Determinare, in funzione della configurazione iniziale, chi ha una strategia vincente.

22. (3) Sia n un intero positivo. Determinare quante sono le permutazioni σ di $(1, 2, \ldots, n)$ tali che $\sigma(1) \leq 2\sigma(2) \leq \ldots \leq (n-1)\sigma(n-1) \leq n\sigma(n)$.

Esercizi C3 Medium

Massimiliano Foschi

18 settembre 2021

I seguenti sono problemi sui grafi. L'ordine è orientativamente crescente di difficoltà.

1. Sono segnate $2n$ caselle di una griglia quadrata di lato n. Dimostrare che esiste una sequenza di caselle $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$ tale che per ogni i, a_{2i-1} e a_{2i} giacciano sulla stessa riga, a_{2i} e a_{2i+1} sulla stessa colonna (indici modulo $2k$).

2. Sia G un grafo orientato completo con n vertici. Determinare il minimo intero positivo k tale per cui è possibile colorare i vertici di k colori in modo che non esistano tre vertici distinti u, v, w per cui gli archi uv e vw siano presenti e abbiano lo stesso colore.

3. In una griglia quadrata di lato n, con n dispari, sono disposti dei pezzi del domino in modo da coprire tutte le caselle tranne quella nell'angolo in basso a sinistra. Dimostrare che è possibile spostare i pezzi solo facendoli scorrere in modo che, alla fine, l'unica casella libera sia quella in alto a destra.

4. Si consideri una tabella rettangolare con un numero reale in ciascuna casella. É noto che la somma dei numeri in ciascuna riga e ciascuna colonna è un intero. Dimostrare che si può rimpiazzare ogni numero con la sua parte intera (inferiore o superiore) in modo che tali somme siano preservate.

5. Siano $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$. Determinare quanti sono al massimo i numeri primi p per cui esistono indici i e j tali che $p = a_i b_j$.

6. Sia G un grafo diretto tale che i gradi uscente ed entrante di ciascun nodo siano 2. Due nodi possono essere collegati solo in un verso. Dimostrare che il numero di sottografi H di G tali che ogni vertice abbia grado uscente ed entrante esattamente 1 è una potenza di 2.

7. Un grafo su 60 vertici ha k archi, colorati di rosso o di blu. Sapendo che non esistono cicli monocromatici di lunghezza 3 o 5, determinare il massimo valore possibile per k.

8. Si consideri una tabella quadrata di lato n. Da essa vengono rimosse n caselle, una per ogni riga e una per ogni colonna. Sia $m(A)$ il numero minimo di pezzi rettangolari con lato minore 1 necessari per partizionare una tabella A. Determinare i possibili valori che $m(A)$ può assumere al variare di A tra le tabelle di lato n.

9. Sia n un intero positivo. Dimostrare che esiste una stringa binaria di lunghezza 2^n tale che ogni possibile stringa binaria lunga n vi compaia esattamente una volta. (La stringa è intesa ciclica)

10. Sia ϵ un reale positivo. Dimostrare che per ogni v sufficientemente grande, un grafo su v vertici con almeno $(1+\epsilon)v$ archi contiene due cicli della stessa lunghezza.

11. Alice ha una mappa del Paese delle meraviglie. Per ogni coppia di città, c'è una strada che le collega. Un giorno tutte le strade sono rese a senso unico. Alice può fare, una dopo l'altra, $4n$ domande al re di cuori, chiedendo la direzione della strada che collega due determinate città. Dimostrare che può determinare se esiste una città con al più una strada uscente.

12. Si considerino $4n$ pietre di pesi $1, 2, 3, \dots, 4n$. Sono colorate con n colori in modo che ce ne siano 4 di ciascun colore. Dimostrare che possono essere raggruppate in due pile in modo che ci siano 2 pietre di ogni colore da ciascun lato e che il peso totale delle due pile sia uguale.

13. Sia G un grafo di 2019 tale che ci siano esattamente 1009 nodi con grado 1010 e 1010 nodi con grado 1009. A ogni mossa, dati tre nodi a, b e c per cui a è connesso a b e c, ma b e c non sono connessi tra di loro, è possibile rimuovere le connessioni con a e aggiungerne una tra b e c. Dimostrare che è possibile, con un'opportuna sequenza di mosse, ottenere un grafo in cui ogni nodo ha grado al più 1.

Eserciziario G1 Medium

1 Complessi

Esercizio 1 (Retta di Simson) Dimostrare che le proiezioni D, E, F di un punto P sui lati di $\triangle ABC$ sono allineate se e solo se P si trova su (ABC).

Esercizio 2 Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, e H_A, H_B, H_C, H_D, gli ortocentri di $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle ABC$ rispettivamente. Dimostrare che AH_A, BH_B, CH_C e DH_D concorrono.

Esercizio 3 Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto con incentro I. Dimostrare che I si trova sulla retta che passa per i punti medi di AC e BD.

Esercizio 4 (Shortlist 1998) Siano O, H il circocentro e l'ortocentro di $\triangle ABC$, e siano D, E, F i simmetrici di A, B, C rispetto a BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che D, E, F sono allineati se e solo se $OH = 2OA$.

Esercizio 5 (Cina 2011) Sia ω la circoscritta di $\triangle ABC$, e A', B', C' i diametralmente opposti di A, B, C su ω. Sia P un punto, e siano D, E, F le sue proiezioni su BC, CA, AB rispettivamente. Se X è il simmetrico di A' rispetto a D, e Y, Z sono definiti analogamente, dimostrare che $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ sono inversamente simili.

Esercizio 6 Siano Y, Z punti sui lati AC e AB di $\triangle ABC$, tali che il circocentro O si trovi su YZ. Se M, N sono i punti medi di BY e CZ rispettivamente, dimostrare $\angle MON = \angle BAC$.

Esercizio 7 Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico, E l'intersezione delle sue diagonali e F, G le proiezioni di E su AB, CD rispettivamente. Dimostrare che FG è perpendicolare alla retta per i punti medi di AD e BC.

Esercizio 8 (MOP 2006) I punti D, E, F si trovano sulla circoscritta di $\triangle ABC$ e sono tali che $AD /\!/ BE /\!/ CF$. Se D' è il simmetrico di D rispetto a BC e E', F' sono definiti analogamente, dimostrare che l'ortocentro di $\triangle ABC$ si trova su $(D'E'F')$.

Esercizio 9 (Balkan 2014) Sia $ABCD$ un trapezio inscritto in una circonferenza Γ di cui AB è un diametro, e sia E l'intersezione delle sue diagonali. La circonferenza di centro B e raggio BE interseca Γ in K e L (con K dalla stessa parte di AB rispetto a C). Se la perpendicolare a BD per E interseca CD in M, dimostrare che KM è perpendicolare a DL.

Esercizio 10 (PreIMO 2011) Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico in cui le rette BC ed AD si incontrano in un punto P. Sia Q il punto della retta BP, diverso da B, tale che $PQ = BP$. Costruiamo i parallelogrammi $CAQR$ e $DBCS$. Dimostrare che i punti C, Q, R, S stanno su una stessa circonferenza.

2 Baricentriche

Esercizio 1 Dimostrare le espressioni per gli excentri e per i punti di Nagel, Gergonne e Lemoine.

Esercizio 2 Dimostrare le formule per il coniugato isotomico $[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}]$ e isogonale $[\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}]$.

Esercizio 3 Determinare le espressioni delle bisettrici interne e esterne, delle mediane, simmediane, altezze e assi di $\triangle ABC$.

Esercizio 4 Determinare le espressioni per i punti medi degli archi di (ABC) e dei loro diametralmente opposti.

Esercizio 5 Determinare l'equazione della retta di Eulero e della retta che passa per il circocentro e l'incentro di $\triangle ABC$.

Esercizio 6 Dimostrare che in un triangolo $\triangle ABC$ il baricentro G, l'incentro I e il punto di Nagel N sono allineati, determinare l'equazione della retta su cui si trovano e dimostrare $GN = 2GI$.

Esercizio 7 (EGMO 2013) Sia $\triangle ABC$ un triangolo, D il simmetrico di B rispetto a C e E il punto sulla semiretta CA tale che $AE = 2AC$. Dimostrare che $AD = BE$ implica $\triangle ABC$ rettangolo.

Esercizio 8 (USA 2003) Sia $\triangle ABC$ un triangolo, e P un punto al suo interno.

Se chiamiamo D, E, F le intersezioni di AP, BP, CP con BC, CA, AB e supponiamo $[PAF] + [PBD] + [PCE] = \frac{1}{2}[ABC]$, dimostrare che P si trova su (almeno) una mediana di $\triangle ABC$.

Esercizio 9 (MOP 2006) Sia $\triangle ABC$ un triangolo con circocentro O, e sia P l'intersezione di BC e della tangente alla circoscritta in A. Se M, N sono le intersezioni della bisettrice di $\angle APB$ con AC, AB rispettivamente, definiamo Q come l'intersezione di BM e CN. Se supponiamo O, P, Q allineati, determinare $\angle BAC$.

Esercizio 10 (IMO 2014) Sia ABC un triangolo, e siano P, Q sul segmento BC tali che $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Siano M, N i simmetrici di A rispetto a P, Q rispettivamente. Dimostrare che BM e CN si incontrano su (ABC).

Esercizio 11 (Balkan 2017) Sia $\triangle ABC$ un triangolo scaleno, siano t_B e t_C le tangenti alla sua circoscritta in B, C rispettivamente, e sia L la loro intersezione. La parallela a AC per B interseca t_C in D, mentre la parallela a AB per C interseca t_B in E. (BDC) interseca AC in $T \neq C$, e (BDE) interseca AB in $S \neq B$. Dimostrare che AL, BC, ST concorrono.

Esercizio 12 (IMO 2012) Dato un triangolo $\triangle ABC$, il punto J è il centro dell'excerchio opposto ad A, il quale tange AB e AC in K, L rispettivamente, e M è il punto medio di BC. Le rette LM e BJ si intersecano in F, e le rette KM e CJ si intersecano in G. Sia S il punto di intersezione delle rette AF e BC, e sia T il punto di intersezione delle rette AG e BC. Dimostrare che M è il punto medio di ST.

Esercizio 13 (WC 2018) Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo. Sia E un punto variabile sul lato AC, e sia F un punto variabile sul lato AB tale che $BC^2 = BA \cdot BF + CE \cdot CA$. Dimostrare che, al variare di E ed F, le circonferenze circoscritte al triangolo $\triangle AEF$ hanno un punto fisso in comune oltre ad A.

Esercizi Geometria Medium 2

Esercizio 1 *(Unicità del quarto armonico)*
Assumiamo che A, B, C, D_1 e D_2 siano conciclici o allineati. Mostrare che se $(A, B; C, D_1) = (A, B; C, D_2)$ allora $D_1 \equiv D_2$.

Esercizio 2
Si fissino A, B, C su una retta e si faccia variare D. Come varia il birapporto $(A, B; C, D)$ dalla posizione di D? Come questo dipende dall'ordine in cui sono disposti A, B, C?

Esercizio 3 *(Permutazioni in un birapporto)*
Siano A, B, C, D quattro punti tali che $(A, B; C, D) = k$. Dimostrare che:

- $(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (C, D; A, B) = (D, C; B, A) = k$
- $(A, B; D, C) = (B, A; C, D) = (D, C; A, B) = (C, D; B, A) = \frac{1}{k}$
- $(A, C; B, D) = (C, A; D, B) = (B, D; A, C) = (D, B; C, A) = 1 - k$
- $(A, C; D, B) = (C, A; B, D) = (D, B; A, C) = (B, D; A, C) = \frac{1}{1-k}$
- $(A, D; C, B) = (D, A; B, C) = (C, B; A, D) = (B, C; D, A) = \frac{k}{k-1}$
- $(A, D; B, C) = (D, A; C, D) = (C, B; D, A) = (B, C; A, D) = \frac{k-1}{k}$

Esercizio 4
Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze di centri O_1 e O_2 rispettivamente. Siano S_1 e S_2 rispettivamente il centro di similitudine interno ed esterno di γ_1 e γ_2.
Mostrare che $(O_1, O_2; S_1, S_2) = -1$.

Esercizio 5 *(Teorema della farfalla)*
Sia MN una corda di una circonferenza γ e sia P il suo punto medio. Siano AB e CD due corde qualsiasi di γ che si intersecano in P dimodoché A e C siano nello stesso semipiano generato dalla retta su cui giace MN.
Mostrare che AD e BC intersecano la corda MN in due punti equidistanti da P.

Esercizio 6 *(Tripolare)*
Sia ABC un triangolo, D, E, F tre punti sui lati BC, AC, AB rispettivamente. Siano $X = BC \cap EF$, $Y = AC \cap DF$, $Z = AB \cap DE$. Si mostri che le rette AD, BE, CF concorrono in un punto P se e soltanto se X, Y, Z sono allineati.
(In questo caso, la retta XYZ viene detta Tripolare *di P)*

Esercizio 7
Siano A, B, C, D quattro punti allineati, e P un punto esterno alla retta. Si dimostri che se sono verificate qualsiasi due delle seguenti tre condizioni, allora vale anche la terza:

1. $(A, B; C, D) = -1$
2. La retta PB biseca l'angolo $\angle CPD$ (internamente o esternamente)
3. $\angle APB = 90°$

Hint: Assumendo che valga 1, considera la circonferenza di Apollonio con tutti i punti X tali che $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$

Esercizio 8
Siano A, C, B e D allineati in quest'ordine su una retta. Siano M e N i punti medi dei segmenti CD e AB rispettivamente.
Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti (una qualsiasi implica tutte le altre):

- $(A, B; C, D) = -1$;
- $MA \cdot MB = MC^2$;
- $CA \cdot CB = CD \cdot CN$;
- $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$;
- $AB^2 + CD^2 = 4MN^2$.
- $\frac{NC}{ND} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$

Hint: Usa l'esercizio precedente e traccia la circonferenza di diametro AB

Esercizio 9 *(Conservazione del birapporto per inversione)*
Assumiamo che A, B, C e D siano allineati o conciclici. Siano A', B', C' e D' (allineati o conciclici) le immagini dei precedenti punti tramite un'inversione circolare di centro $O \notin \{A, B, C, D\}$ qualsiasi. Allora

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D'). \tag{1}$$

Cosa succede se $O \in \{A, B, C, D\}$?

Esercizio 10
Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze *ortogonali* di centri O_1 e O_2 rispettivamente. Una generica retta passante per O_1 interseca γ_1 in A e B e interseca γ_2 in C e D.
Mostrare che $(A, B; C, D) = -1$.

Esercizio 11
Sia ABC un triangolo scaleno e sia $D \in AC$ tale che BD è la bisettrice di $\angle ABC$. Siano E ed F i piedi delle perpendicolari tracciate rispettivamente da A e da C sulla retta BD e sia $M \in BC$ tale che $DM \perp BC$.
Mostrare che $\angle EMD = \angle DMF$.

Esercizio 12 *(Il quadrangolo completo è armonico)*
Siano A, B, C, D quattro punti del piano, non allineati. Siano $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$, $R = AC \cap BD$. La retta QR interseca AB in T e DC in S.
Si dimostri che $(Q, R; T, S) = -1$.

Esercizio 13 *(Lemma della simmediana)*
Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza γ. Le tangenti a γ in B e C si intersecano in P.
Mostrare che AP è *simmediana* relativa a BC, *i.e.* simmetrica della mediana relativa a BC rispetto alla bisettrice dell'angolo $\angle BAC$.

Esercizio 14 *(Proprietà del quadrilatero armonico)*
Siano A, B, C, D punti su una circonferenza Γ. Si mostri che le seguenti condizioni sono equivalenti, ovvero una qualsiasi implica tutte le altre:

1. $(A, C; B, D) = -1$, ovvero il quadrilatero è armonico
2. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$
3. BD è simmediana di $\triangle ABC$
4. BD e le tangenti in A e in C a Γ concorrono in un punto.
5. Se M è il punto medio di AC, i seguenti angoli sono uguali: $\angle BMA = \angle AMD$
6. La bisettrice di $\angle ABC$, la bisettrice di $\angle ADC$ e la retta AC concorrono
7. $\frac{AB^2}{AD^2} = \frac{MB}{MD} = \frac{CB^2}{CD^2}$.

Siano O il centro di Γ, P l'intersezione delle tangenti in A e C, e Q l'intersezione delle tangenti in B e D. Assumendo che il quadrilatero sia armonico, valgono le seguenti proprietà:

- I triangoli $\triangle BMC$, $\triangle BAD$ e $\triangle CMD$ sono simili
- $BMODQ$ è ciclico

Esercizio 15
Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Le rette AB e CD si intersecano in un punto E e le diagonali AC e BD si intersecano in un punto F. Sia H l'intersezione delle circonferenze circoscritte ai triangoli AFD e BFC.
Mostrare che $\angle EHF = 90°$.

Esercizio 16
Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto a una circonferenza e siano M, N, P e Q i punti di tangenza di AB, BC, CD e DA con la circonferenza rispettivamente.
Mostrare che AC, BD, MP e NQ sono concorrenti.

Esercizio 17 *(APMO 2012 - 4)*
Sia ABC un triangolo acutangolo e sia D su BC il piede dell'altezza da A. Indichiamo poi con M il punto medio di BC e con H l'ortocentro. Sia E il punto di intersezione della circonferenza circoscritta Γ con la semiretta per H uscente da M e sia F il punto di intersezione (diverso da E) di ED con Γ.

Dimostrare che $BF/CF = AB/AC$.

Esercizio 18 *(IMO 2014 - 4)*
Siano P e Q punti su un segmento BC di un triangolo acutangolo ABC tali che $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Siano M e N punti su AP e AQ rispettivamente tali che P è punto medio di AM e Q è punto medio di AN.
Mostrare che l'intersezione di BM e CN giace sulla circonferenza circoscritta di ABC.

Esercizio 19 *(Iran TST 2007 Day 2 - 3)*
Sia ω la circonferenza inscritta ad un triangolo ABC che tange AB e AC rispettivamente in F e E. Siano P e Q su AB e AC rispettivamente in modo che PQ sia parallelo a BC e tangente ad ω. Siano T l'intersezione di EF con BC e M il punto medio di PQ.
Mostrare che TM tange ω.

Esercizio 20 *(IMOSL 2017 - G4)*
Sia ABC un triangolo, ω l'excerchio opposto ad A. Siano D, E, F i punti di tangenza di ω con i lati BC, AC, AB. La circonferenza per E, A, F interseca BC in P e Q.Sia M il punto medio di AD.
Dimostrare che la circonferenza per MPQ tange ω.

Esercizio 21 *(BMO 2018-1)*
Sia k una circonferenza in cui è iscritto un quadrilatero $ABCD$ tale che $AB > CD$con AB, CD non paralleli. Sia M l'intersezioni delle diagonali. Sia E la proiezione di M su AB. Dimostrare che se la retta EM biseca l'angolo $\angle CED$ allora AB è diametro di k.

Esercizio 22 *(Romania TST 2012)*
Sia W una cironferenza su un piano e sia l una retta esterna ad essa,sia K un punto su l e siano A, B su W in modo tale che KA, KB tangano W. Siano P, Q su W. Definiamo $PA \cap l = R$,$PB \cap l = S$,$QS \cap W = (D, Q)$,$QR \cap W = (C, Q)$
Dimostrare che le tangenti in C, D a W concorrono su l.

Esercizio 23 *(IGO 2019 advanced P3)*
I cerchi ω_1 and ω_2 hanno centri O_1 e O_2, rispettivamente. Questi due cerchi si intersecano nei due punti X e Y. AB è una tangente comune ai due cerchi in modo tale che A stia su ω_1 e B stia su ω_2. Le tangenti a ω_1 e ω_2 in X intersecano O_1O_2 nei punti K e L, rispettivamente. Supponiamo che la retta BL intersechi ω_2 per la seconda volta in M e la retta AK intersechi ω_1 per la seconda volta in N. Dimostrare che le rette AM, BN e O_1O_2 concorrono.

Esercizio 24 *(IMOSL 2019-G6)*
Sia I l'incentro del triangolo ABC ,l'incerchio tange i lati BC, CA, AB in D, E, F rispettivamente. EF interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in P, Q in modo tale che F stia tra E e P. Dimostrare che $\angle DPA + \angle AQD = \angle QIP$.

Eserciziario G3 Medium

Esercizio 1 Dimostrare che se M è il punto di Miquel di $ABCD$, $E = AB \cap CD$ e $F = AD \cap BC$ allora si ha $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$ e $\{MB, MD\}, \{ME, MF\}$ sono coppie di rette isogonali rispetto a $\angle MAC$.

Esercizio 2 Sia fissato $ABCD$ quadrilatero convesso con $BC = DA$, e siano E, F punti sui segmenti BC, DA rispettivamente, tali che $BE = DF$. Se $P = AC \cap BD, Q = BD \cap EF$ e $R = AC \cap EF$, dimostrare che, al variare di E, F la circonferenza (PQR) passa per un punto fisso.

Esercizio 3 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele, con $AB /\!/ CD$, e sia γ la sua circonferenza circoscritta. Siano P e Q due punti sul segmento AB tali che $AP = QB$. Siano E, F le seconde intersezioni di CP e CQ con γ e sia $G = EF \cap AB$. Dimostrare che GD tange γ.

Esercizio 4 Sia P un punto interno al triangolo $\triangle ABC$ tale che $\angle APB - \angle ACB = \angle CPA - \angle CBA$. Se D, E sono gli incentri di $\triangle APB$ e $\triangle APC$, dimostrare che AP, BD, CE concorrono.

Esercizio 5 Sia $\triangle ABC$ un triangolo inscritto nella circonferenza ω. Le tangenti a ω per B, C si intersecano in T, e S è il punto su BC tale che $\angle TAS$ è retto. Siano B_1, C_1 punti su ST tali che $TB_1 = TC_1 = TB$, dimostrare che $\triangle ABC$ e $\triangle AB_1C_1$ sono simili.

Esercizio 6 Siano P, Q, R punti sui lati BC, CA, AB rispettivamente del triangolo $\triangle ABC$. Se AP interseca nuovamente $(AQR), (BRP), (CPQ)$ in X, Y, Z rispettivamente, dimostrare $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

Esercizio 7 Sia $\triangle ABC$ un triangolo, e siano M, N, P i punti medi di BC, CA, AB rispettivamente. Gli assi di AB e AC intersecano AM in D, E rispettivamente, e sia $F = BD \cap CE$. Dimostrare che $AFNP$ è ciclico.

Esercizio 8 I punti A_1, B_1, C_1 si trovano sui lati BC, CA, AB rispettivamente del triangolo $\triangle ABC$, e le circonferenze $(AB_1C_1), (BC_1A_1), (CB_1A_1)$ intersecano (ABC) una seconda volta in A_2, B_2, C_2 rispettivamente. Se i simmetrici di A_1, B_1, C_1 rispetto ai punti medi di BC, CA, AB sono A_3, B_3, C_3, dimostrare che $\triangle A_2B_2C_2$ è simile a $\triangle A_3B_3C_3$.

Esercizio 9 Sia $\triangle ABC$ un triangolo inscritto nella circonferenza Γ, e sia ω_A la circonferenza mistilinea inscritta opposta al vertice A. ω_A tange AB, AC e Γ in B_1, C_1 e T rispettivamente. I è l'incentro di $\triangle ABC$, e M è l'intersezione di AI e Γ. Inoltre, D e E sono i punti di tangenza dell'incerchio e dell'excerchio opposto a A con BC. Dimostrare che:

1. BI tange (CTC_1), e CI tange (BTB_1)
2. L'intersezione di AI e BC si trova su (DTM_A).
3. BC, B_1C_1 e TM_A concorrono.
4. $TM_A \cap AD$ e $TI \cap AE$ si trovano su ω_A.

Esercizio 10 Sia $\triangle ABC$ un triangolo scaleno, e siano K_A, L_A e M_A le intersezioni di BC con la bisettrice interna, esterna e mediana uscenti da A rispettivamente. (AK_AL_A) interseca una seconda volta AM_A in X_A, e X_B, X_C sono definiti analogamente. Dimostrare che il circocentro di $\triangle X_AX_BX_C$ si trova sulla retta di Eulero di $\triangle ABC$.

Esercizio 11 Sia $\triangle ABC$ un triangolo acutangolo scaleno. Siano Γ la sua circonferenza circoscritta, H il suo ortocentro, e F il piede dell'altezza condotta da A. Sia M il punto medio di BC. Sia Q il punto di Γ tale che $\angle HQA = 90°$, e sia K il punto di Γ tale che $\angle HKQ = 90°$. Dimostrare che le circonferenza circoscritte ai triangoli $\triangle KQH$ e $\triangle FKM$ sono tangenti tra di loro.

Esercizio 12 P è un punto sulla simmediana uscente da A nel triangolo $\triangle ABC$. O_1, O_2 sono i circocentri di $\triangle ABP, \triangle CAP$ rispettivamente. Se O è il circocentro di $\triangle ABC$, dimostrare che AO biseca O_1O_2.

Esercizio 13 Dimostrare che il punto di Gergonne e il centro di similitudine interna tra inscritta e circoscritta sono coniugati isogonali.

Esercizio 14 Sia ABC un triangolo di incentro I e sia D un punto sul lato BC. Sia P (rispettivamente Q) il centro della circonferenza che tange i segmenti AD e DC (rispettivamente DB) e la circonferenza circoscritta ad ABC. Mostrare che P, Q e I sono allineati.

Esercizio 15 Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscritto da una circonferenza ω di centro O. Sia P l'intersezione delle diagonali AC e BD e sia Q l'intersezione delle circoscritte a ABP e CDP diversa da P. Mostrare che $OQ \perp QP$.

Esercizio 16 Una circonferenza passante per i punti A e B di un triangolo ABC

incontra il lato BC nuovamente in D. Una circonferenza per B e C incontra il lato AB in E e la prima circonferenza in F. Mostrare che se $AEDC$ è ciclico di centro O, allora $\angle BFO = 90°$.

Esercizio 17 L'inscritta di ABC tocca i lati BC, AC, AB in D, E, F rispettivamente. Sia I l'incentro ed M il punto medio di BC. Mostrare che AM, EF, DI concorrono.

Esercizio 18 Sia ABC un triangolo la cui inscritta tocca i lati BC, AC, AB in D, E, F. Sia I l'incentro e T l'intersezione tra CI e EF. Mostrare che

- B, D, I, T, F sono conciclici.
- $\angle BTC = 90°$
- T giace sulla retta congiungente i punti medi di BC e AB.

Stage Senior 2021- eserciziario G4 medium

Esercizio 1. Sia ABC un triangolo acutangolo scaleno. Le riflessioni del baricentro G e del circocentro O di ABC nei lati BC, CA, AB sono definite G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3, rispettivamente. Dimostrare che le circonferenze G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A and ABC hanno un punto in comune.

Esercizio 2. Siano l e r due rette che si incontrano in P. Sia Q un punto esterno ad esse e sia A un punto variabile su l. Sia B l'intersezione di r con la circonferenza circoscritta ad PQA.
a) Dimostrare che al variare di A, gli ortocentri di ABQ stanno tutti su una stessa retta
b) Dimostrare che al variare di A, gli ortocentri di ABP stanno tutti su una stessa retta

Esercizio 3. Sia ABC un triangolo acutangolo con incentro I e sia D un punto arbitrario nel lato BC. La retta per D perpendicolare a BI interseca CI in E. La retta per D perpendicolare a CI interseca BI in F. Mostrare che il simmetrico di A rispetto alla retta EF sta su BC.

Esercizio 4. Sia ABC un triangolo con incentro I. La circonferenza passante per B tangente a AI in I incontra il lato AB per la seconda volta in P. La circonferenza per C tangente a AI in I incontra il lato AC per la seconda volta in Q. Dimostra che PQ è tangente alla circoncerenza inscritta a ABC.

Esercizio 5. Sia ABC un triangolo e sia Ω una parabola tangente ai lati di ABC. a) Dimostrare che il fuoco di Ω sta sulla circonferenza circoscritta ad ABC b) Dimostrare che la direttrice di Ω passa per H, ortocentro di ABC.

Esercizio 6. Sia Ω una parabola tangente ai lati di ABC e che abbia come direttrice la retta di Eulero di ABC. Dimostrare che Ω è tangente anche alla retta passante per i centri delle tre circonferenze di Apollonio di ABC.

Esercizio 7. Sia $ABCD$ un quadrilatero. Definiamo I_A, I_B, I_C e I_D centri delle circonferenze $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ e ω_D,inscritte nei triangoli DAB, ABC, BCD e CDA,rispettivamente .Risulta che $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$. Dimostrare che $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

Esercizio 8. Sia $ABCD$ un quadrilatero circoscrivibile. Sia g una retta per A che interseca il segmento BC in M e la retta CD in N. Siano I_1, I_2 e I_3 gli incentri dei triangoli $\triangle ABM$, $\triangle MNC$ and $\triangle NDA$, rispettivamente. Dimostrare che l'ortocentro del triangolo $\triangle I_1I_2I_3$ sta su g.

Esercizio 9. Sia N il punto medio dell'arco ABC della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, sia M il punto medio di AC e siano I_1, I_2 gli incentri dei triangoli ABM e CBM. Dimostrare che i quattro punti I_1, I_2, B, N sono conciclici.

Esercizio 10. Sia ABC un triangolo, sia P un punto interno ad esso e sia P' il suo coniugato isogonale. Dimostrare che se $BCPP'$ è ciclico, allora anche $BCPP'I$ è ciclico.

Esercizio 11. Sia ABC un triangolo con circonferenza circoscritta Ω e incentro I. Una retta ℓ interseca le rette AI, BI, e CI nei punti D, E, e F, rispettivamente, diverse dai punti A, B, C, e I. Gli assi x, y, e z dei segmenti AD, BE, e CF, determinano un triangolo Θ. Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo Θ è tangente ad Ω.

Esercizio 12. I punti C_1, B_1 nei lati AB, AC del triangolo ABC sono tali che $BB_1 \perp CC_1$. Il punto X sta all'interno del triangolo in modo tale che $\angle XBC = \angle B_1BA, \angle XCB = \angle C_1CA$. Dimostrare che $\angle B_1XC_1 = 90^o - \angle A$.

Esercizio 13. Sia D un punto interno al triangolo acutangolo ABC con $AB > AC$ tale che $\angle DAB = \angle CAD$. Il punto E sul segmento AC soddisfa $\angle ADE = \angle BCD$, il punto F sul segmento AB soddisfa $\angle FDA = \angle DBC$. Dimostrare che $BCEF$ è ciclico.

Esercizio 14. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Dimostrare innanzitutto che esiste esattamente una coppia di punti P, Q tali che :
$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCD$ e $\angle QBA=\angle QCB=\angle QDC$
Dimostrare successivamente che i 6 angoli precedentemente citati sono tutti uguali.

Esercizio 15. Sia ABC un triangolo ,sia O circocentro e sia l una retta per O. Sia P un punto sulla retta l Dimostrare che al variare di P sulla retta l le circonferenze passanti le proiezioni di P su AB, AC, BC passano tutte per un punto. (Hint: considerare l'anti-steiner point di l rispetto al triangolo mediale di ABC)

Esercizio 16. Dato il triangolo ABC e un punto P sul piano, siano P_a, P_b, P_c i simmetrici di P rispetto a BC, AC, AB. Le rette PA, PB, PC incontrano la circoscritta ad ABC per la seconda volta in D, E, F rispettivamente. Dimostrare ceh le circonferenze dei triangoli AP_bP_c, PDP_a e tutti i triangoli che si ottengono da questi scambiando tra loro le lettere A, B, C passano per uno stesso punto.

Stage Senior 2021- eserciziario N1 medium

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni intero positivo m esiste n intero positivo tale che $v_3(2^n + 1) = m$

Esercizio 2. Siano a, n due interi positivi e sia p un numero primo. Sappiamo che $p^n | a^p - 1$. Dimostrare che $p^{n-1} | a - 1$

Esercizio 3. Siano a, n due interi positivi e sia p un numero primo. Dimostrare che se $2^p + 3^p = a^n$,allora $n = 1$

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni a, n interi positivi: $n | \phi(a^n - 1)$

Esercizio 5. Sia p un numero primo e n un intero positivo. Dimostrare che se $v_p(2^n - 1) = 1$ allora $v_p(2^{p-1} - 1) = 1$

Esercizio 6. Siano a, b due numeri reali distinti. Sappiamo che per ogni n intero positivo $a^n - b^n$ è intero. Dimostrare che a e b sono interi

Esercizio 7. Dimostrare che 2 genera modulo 3^n per ogni intero positivo n

Esercizio 8. Sia a un intero positivo , se per ogni intero positivo n , $4(a^n + 1)$ è un cubo perfetto,allora $a = 1$

Esercizio 9. Sia a un intero positivo e per ogni k intero positivo sia $a_k = 1 + a + a^2 + a^3 ... + a^{k-1}$. Siano s, t interi positivi distinti con la seguente proprietà: per ogni p numero primo , se $p | s - t$ allora $p | a - 1$. Dimostrare che la seguente espressione è intera:

$$\frac{a_s - a_t}{s - t}$$

Esercizio 10. Dimostrare che per ogni intero positivo n, esiste un intero positivo m per cui $7^n | 3^m + 5^m - 1$

Esercizio 11. Alice e Bobo fanno il seguente gioco,si alternano a scegliere cifre distinte da 1 a 9 fino a che non hanno scelto 7 cifre e successivamente considerano il numero A,ottenuto concatenando le 7 cifre in ordine di scelta con la settima cifra come ultima ($\overline{A_1 B_2 A_3 B_4 A_6 B_6 A_7}$). Alice vince se e solo se esiste una potenza settima le cui ultime 7 cifre sono il numero risultante A. Determinare chi ha una strategia vincente

Esercizio 12. Dimostrare che non esistono $x > 1, y > 1$ interi postivi per cui:

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

Esercizio 13. Siano $p_1, p_2, ...p_n$ numeri primi distinti maggiori di 3. Dimostrare che $2^{p_1 p_2 \cdot\cdot p_n} + 1$ ha almeno 4^n divisori.

Esercizio 14. Sia p un numero primo maggiore 3. Dimostrare che la somma $1^{p+2} + 2^{p+2} + ... + (p-1)^{p+2}$ è divisibile per p^2

Esercizio 15. Determinare tutti gli interi positivi n per cui esiste m tale che $2^n - 1 | m^2 + 1$

Esercizio 16. Determinare tutti gli n che dividono un numero della forma $49m^2 + 1$ per un certo m intero positivo.

Esercizio 17. Sia p un numero primo,n un intero positivo e a un intero. Supponiamo che

$$\Phi_n(a) \equiv 0 (mod p)$$

Dimostrare che $p | n$ o a ha ordine n modulo p

Esercizio 18. Dimostrare che per ogni intero positivo n, esistono infiniti primi p congrui a 1 mod n

Esercizio 19. Dimostrare che esiste un intero n con esattamente 2021 fattori primi distinti tali che $n | 2^n + 1$

Esercizio 20. Per quali interi positivi $b > 2$ esistono infiniti interi positivi n tali che $n^2 | b^n + 1$

Esercizio 21. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficenti interi. Dimostrare che non esiste m tale che per ogni $n > m$, $p(n)$ è squarefree (libero da quadrati)

Esercizio 22. Sia p un numero primo $p \geq 5$. Dimostrare che :

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \equiv 0 (mod p^2)$$

Esercizio 23. Sia p un numero primo calcolare in funzione di p:

$$\prod_{k=0}^{p-1} (k^2 + 1)$$

Esercizio 24. Trovare tutte le funzioni suriettive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ e per ogni primo p, il numero $f(m+n)$ è divisibile per p se e solo se $f(m) + f(n)$ è divisibile per p.

Stage Senior 2021- eserciziario N2 medium

Esercizio 1. Determinare tutte le soluzioni razionali, dato un intero d fissato, di : $x^2 - dy^2 = 1$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni intere di $x^2 - 3y^2 = 1$

Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni intere di $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$

Esercizio 4. Quante sono le soluzioni (x, y) negli interi positivi di $x^2 + y^2 = 5005$ con $x > y$?

Esercizio 5. La cifra finale di $x^2 + xy + y^2$ è 0 (x, y sono interi positivi). Mostrare che le ultime due cifre sono 0

Esercizio 6. Risolvere negli interi positivi $x^2 + 4^y = 5^z$.

Esercizio 7. Dimostrare che se la differenza di due cubi consecutivi è n^2 per un certo intero positivo n, allora $2n - 1$ è un quadrato perfetto

Esercizio 8. Siano x, y, z interi positivi tali che $xy = z^2 + 1$. Dimostrare che esistono interi positivi a, b, c, d tali che:$x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, z = ac + bd$

Esercizio 9. Determinare tutti gli interi positivi m per cui esiste x tale che $(2m^2 - 1)^2 - 8x^2 = 1$

Esercizio 10. Per un intero positivo a, definiamo la sequenza di interi $x_1, x_2, \ldots$ come $x_1 = a$ e $x_{n+1} = 2x_n + 1$ for $n \geq 1$. Sia $y_n = 2^{x_n} - 1$.Determinare il più grande k tale che, per un certo a, i numeri $y_1, \ldots, y_k$ sono tutti primi.

Esercizio 11. Dimostrare che se un numero K è residuo quadratico modulo p per ogni p primo,allora K è un quadrato perfetto

Esercizio 12. Risolvere negli interi $y^2 + 1 = x^5$

Esercizio 13. Determinare tutti i numeri primi p tali che $p! + p$ è un quadrato perfetto.

Esercizio 14. Siano a, b interi, e sia $P(x) = ax^3 + bx$. Per ogni intero positivo n diciamo che la coppia (a, b) è n-golosa se $n | P(m) - P(k)$ implica $n | m - k$ per tutti gli interi m, k. Diciamo che una coppia (a, b) è *molto golosa* se (a, b) è n-golosa per infiniti interi positivi n. (a) Trovare una coppia (a, b) che è 51-golosa, ma non molto golosa. (b)Dimostrare che tutte le coppie 2010-golose sono molto golose.

Esercizio 15. Esistono infiniti interi positivi n tali che $n^2 + 1$ ha un fattore primo $> 2n + \sqrt{2n}$.

Esercizio 16. Sia $p > 5$ un primo ed m il periodo dei Fibonacci modulo p. Mostrare che:

- se $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, allora $m | p - 1$
- se $p \equiv \pm 2 \pmod 5$, allora $m | 2(p + 1)$ con $\frac{2(p+1)}{m}$ dispari

Esercizio 17. Dimostrare che tra 20 interi positivi consecutivi esiste un intero d tale che per ogni intero positivo n vale la seguente disuguaglianza:

$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2}$$

Esercizio 18. Siano m e n due interi positi coprimi tra di loro. dimostrare che $\phi(5^m - 1) \neq 5^n - 1$

Esercizio 19. Risolvere negli interi $y^2 + 1 = x^n$ dove n è un intero positivo.

Esercizio 20. Determinare se esistono interi $a, b, c > 2021$ soddisfacenti l'equazione:

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 6abc + 1.$$