XXXVIII Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 6 maggio 2022

1. Determinare per quali interi positivi n esiste un intero positivo A tale che
   - A è multiplo di 2022,
   - l'espressione decimale di A contiene solo cifre 0 e 7,
   - l'espressione decimale di A contiene *esattamente* n volte la cifra 7.

2. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano
   - D il piede della bisettrice dell'angolo in A,
   - E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
   - F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
   - G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

   Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC.

3. Ad una gara matematica partecipano $n = 10\,000$ concorrenti.

   Alla festa conclusiva, in successione, il primo prende $1/n$ della torta, il secondo prende $2/n$ della torta rimanente, il terzo prende $3/n$ della torta che rimane dopo che il primo e il secondo si sono serviti, e così via fino all'ultimo, che prende tutta la torta rimanente.

   Determinare quale concorrente prende il pezzo di torta più grosso.

4. Alberto sceglie 2022 numeri interi $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ (non necessariamente positivi e non necessariamente distinti) e li dispone su una tabella 2022×2022 in modo che nella casella (i, j) ci sia il numero a_k, con k uguale al massimo tra i e j, come nella figura seguente (in cui, per maggior leggibilità, abbiamo indicato a_{2022} con a_n).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		a_n
a_2	a_2	a_3	a_4	a_5		a_n
a_3	a_3	a_3	a_4	a_5	$\vdots$	a_n
a_4	a_4	a_4	a_4	a_5		a_n
a_5	a_5	a_5	a_5	a_5		a_n
			$\ldots$			a_n
a_n	a_n	a_n	a_n	a_n	a_n	a_n

Barbara non conosce i numeri scelti da Alberto, ma sa come sono stati disposti nella tabella. Fissato un intero k, con $1 \leq k \leq 2022$, Barbara vuole determinare il valore di a_k, mentre non le interessa determinare i valori degli altri a_i con $i \neq k$. Per farlo, Barbara può porre ad Alberto una o più domande, in ciascuna delle quali chiede ad Alberto quanto valga la somma dei numeri contenuti nelle caselle di un "percorso", dove con il termine "percorso" si intende una lista ordinata di caselle con le seguenti caratteristiche:

- il percorso inizia con la casella in alto a sinistra e finisce con la casella in basso a destra,
- le caselle del percorso sono tutte distinte,
- due caselle consecutive del percorso hanno sempre un lato in comune.

Determinare, al variare di k, il numero minimo di domande necessarie a Barbara per determinare a_k.

5. Il robot "Mag-o-matic" manipola 101 bicchieri, disposti in una fila le cui posizioni sono numerate da 1 a 101. In ognuno dei bicchieri può trovarsi, oppure no, una pallina. Il robot Mag-o-matic accetta solo istruzioni elementari della forma $(a; b, c)$, che interpreta come

   > "considera il bicchiere in posizione a: se contiene una pallina, allora scambia tra di loro i bicchieri che si trovano nelle posizioni b e c (con il relativo eventuale contenuto), altrimenti passa all'istruzione successiva"

   (si intende che a, b, c sono interi compresi tra 1 e 101, con b e c diversi tra di loro, ma non necessariamente diversi da a). Un *programma* è una sequenza finita di istruzioni elementari, assegnate inizialmente, che Mag-o-matic esegue una dopo l'altra.

   Un sottoinsieme $S \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 101\}$ si dice *identificabile* se esiste un programma che, a partire da una qualunque configurazione iniziale, produce una configurazione finale in cui il bicchiere in posizione 1 contiene una pallina se e solo se il numero dei bicchieri contenenti una pallina è un elemento di S.

   (a) Dimostrare che il sottoinsieme di $\{0, 1, \ldots, 101\}$ costituito dai numeri dispari è identificabile.

   (b) Determinare tutti i sottoinsiemi di $\{0, 1, \ldots, 101\}$ identificabili.

6. Sia ABC un triangolo non equilatero, e sia R il raggio della sua circonferenza circoscritta. La circonferenza inscritta ad ABC ha centro in I, ed è tangente al lato CA nel punto D, ed al lato CB nel punto E.

   Sia A_1 il punto della retta EI tale che $A_1I = R$, con I che sta tra A_1 ed E. Sia B_1 il punto della retta DI tale che $B_1I = R$, con I che sta tra B_1 e D. Sia P l'intersezione delle rette AA_1 e BB_1.

   (a) Dimostrare che P appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

   (b) Supponiamo ora inoltre che $AB = 1$ e che P coincida con C. Determinare i possibili valori del perimetro di ABC.

Problema 1 – Soluzione.

I valori di n richiesti sono tutti e soli i multipli di 3.

Condizione necessaria Sia A un multiplo di 2022 la cui espressione decimale contiene esattamente n volte la cifra 7, ed eventualmente altre cifre 0. Poiché 2022 è multiplo di 3, anche A deve essere multiplo di 3, e quindi (per il criterio di divisibilità per 3) la somma delle cifre di A deve essere a sua volta multipla di 3. Ora la somma delle cifre di A è $7n$, e dunque è multipla di 3 solo se n è multiplo di 3.

Condizione sufficiente Osserviamo che il numero $70\,770 = 2022 \cdot 35$ è multiplo di 2022 e la sua espressione decimale contiene tre cifre 7 e due cifre 0. Questo mostra intanto che $n = 3$ ha la proprietà richiesta.

Più in generale, per ogni intero positivo k osserviamo che il numero che si scrive ripetendo k volte il blocco di cinque cifre 70770, cioè il numero

$$\underbrace{70770\,70770\,\ldots\,70770}_{k \text{ volte}} = 70770 \cdot (1 + 10^5 + 10^{10} + \ldots + 10^{5(k-1)}),$$

è a sua volta multiplo di 2022 e la sua espressione decimale contiene $3k$ volte la cifra 7 e $2k$ volte la cifra 0. Questo mostra che ogni multiplo di 3 ha la proprietà richiesta.

Problema 2 – Soluzione.

Primo metodo (angle chasing) Per le proprietà dell'angolo alla circonferenza (anche nel caso limite della tangente) la tesi è equivalente a dimostrare che $\angle EGA = \angle EFG$.

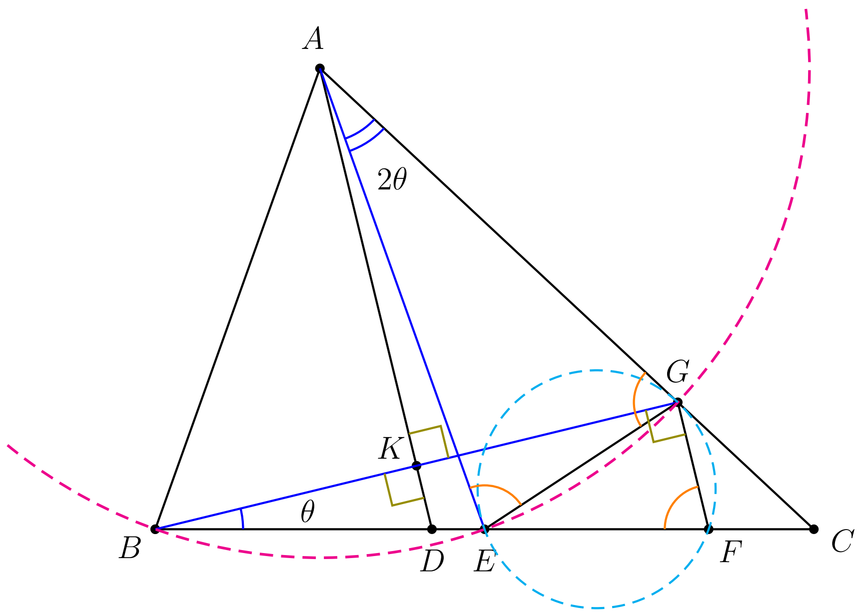
Indichiamo con θ l'ampiezza di $\angle GBC$. Osserviamo che i punti B, E, G appartengono ad una stessa circonferenza con centro in A e quindi, poiché un angolo al centro è il doppio di un corrispondente angolo alla circonferenza, ne deduciamo che $\angle EAG = 2\angle EBG = 2\theta$. Essendo il triangolo AEG isoscele sulla base EG, concludiamo che

$$\angle EGA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EAG) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\theta) = 90^\circ - \theta. \tag{1}$$

Consideriamo ora il triangolo ABG. Si tratta di un triangolo isoscele sulla base BG, e la retta AD è la bisettrice dell'angolo al vertice. Ne segue che la retta AD è anche altezza, ed in particolare è perpendicolare alla retta BG. Indicato con K il punto di intersezione delle rette AD e BG, osserviamo che K è il punto medio di BG (in un triangolo isoscele il piede dell'altezza è il punto medio della base), mentre D è il punto medio di BF (per costruzione). Dal teorema di Talete segue allora che la retta GF è parallela alla retta AD, e dunque perpendicolare alla retta BG. Se ne deduce in particolare che il triangolo BGF è rettangolo in G, da cui

$$\angle EFG = 90^\circ - \angle GBC = 90^\circ - \theta. \tag{2}$$

Confrontando la (1) e la (2) si ottiene l'uguaglianza richiesta.



Variante Potevamo in alternativa dimostrare che $\angle FGC = \angle FEG$. Per calcolare $\angle FGC$ sfruttiamo il parallelismo tra AD e GF, ottenendo che

$$\angle FGC = \angle DAC = \frac{\alpha}{2},$$

dove α indica l'ampiezza dell'angolo in A del triangolo ABC.

Per calcolare $\angle FEG$, consideriamo il punto G', simmetrico di G rispetto ad A, ed osserviamo che il quadrilatero $BEGG'$ è ciclico e ha l'angolo in G' uguale ad $\alpha/2$, perché il corrispondente angolo al centro (in A) è uguale ad α. Dalle proprietà dei quadrilateri ciclici segue allora che

$$\angle FEG = 180^\circ - \angle BEG = \angle BG'G = \alpha/2,$$

come voluto.

Secondo metodo (ciclicità metrica) Per il teorema della tangente e della secante, la tesi è equivalente a dimostrare che

$$CG^2 = CF \cdot CE. \tag{3}$$

Per farlo calcoliamo le lunghezze dei tre segmenti in funzione delle lunghezze dei tre lati, per le quali utilizzeremo le notazioni standard $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Poiché $AG = AB = c$ per costruzione, otteniamo immediatamente che

$$CG = AC - AG = b - c. \tag{4}$$

Per una nota proprietà della bisettrice sappiamo che $BD : DC = AB : AC$, da cui

$$BD : (BD + DC) = AB : (AB + AC).$$

Ne segue che $BD = ac/(b + c)$, e quindi

$$CF = BC - BF = BC - 2BD = a - \frac{2ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{b+c}. \tag{5}$$

Infine, indichiamo con H il piede dell'altezza di ABC uscente dal vertice A. Osserviamo che AH è anche altezza del triangolo isoscele ABE, e dunque H è anche il punto medio di BE, da cui

$$CE = BC - BE = BC - 2BH.$$

Non resta dunque che calcolare la lunghezza di BH. Il modo classico per farlo è di porre $BH = x$ e $CH = y$, ed osservare che x e y verificano il sistema

$$x + y = a, \qquad c^2 - x^2 = b^2 - y^2,$$

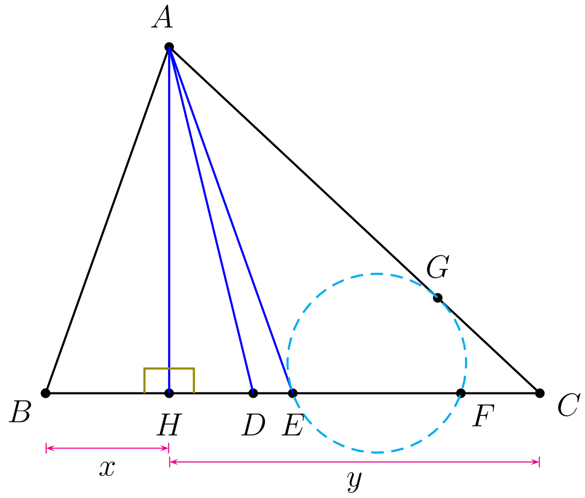
in cui la prima equazione segue dal fatto che $BH + CH = BC$, e la seconda equazione segue dall'aver calcolato in due modi AH^2, applicando il teorema di Pitagora nei triangoli rettangoli ABH e ACH. Risolvendo il sistema si trova che

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

e in conclusione

$$CE = BC - 2BH = a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} = \frac{b^2 - c^2}{a}. \tag{6}$$

Dalle uguaglianze (4), (5) e (6) segue immediatamente la (3).



Osservazione La lunghezza di BH si può ottenere anche come

$$BH = BA \cdot \cos\beta = c\cos\beta,$$

dove con β abbiamo indicato l'angolo $\angle ABC$. A sua volta, $\cos\beta$ si può ricavare in funzione delle lunghezze dei lati utilizzando il teorema del coseno (talvolta citato in Italia come teorema di Carnot), secondo il quale

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Il calcolo che abbiamo effettuato risolvendo il sistema in x e y è in fondo proprio il passo essenziale nella dimostrazione del teorema del coseno.

Problema 3 – Soluzione.

Il concorrente che prende la fetta più grande è quello che si serve per 100-esimo.

Per ogni $k = 1, 2, \ldots, 10\,000$, indichiamo con F_k la fetta che spetta al concorrente k-esimo, e con T_k la quantità di torta rimasta dopo che si sono serviti i primi k concorrenti. Poniamo per convenzione $T_0 = 1$. Dobbiamo determinare il valore di k per cui F_k è massimo. Il testo del problema ci dice che

$$F_k = \frac{k}{n} \cdot T_{k-1} \qquad \text{e} \qquad T_k = \frac{n-k}{n} \cdot T_{k-1}.$$

Da queste due equazioni ricaviamo che

$$F_{k+1} = \frac{k+1}{n} \cdot T_k = \frac{k+1}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot T_{k-1},$$

e quindi

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{k+1}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n}{k} = \frac{(k+1)(n-k)}{nk} = 1 - \frac{k(k+1)-n}{kn}.$$

Questo ci dice in particolare che F_{k+1} è maggiore di F_k se e solo se

$$k(k+1) < n.$$

Tenendo conto che $n = 10\,000$, questo accade se e solo se $k \leq 99$ (basta osservare che $k(k+1)$ è una funzione crescente dell'intero positivo k e valgono le disuguaglianze $99 \cdot 100 < 10\,000$ e $100 \cdot 101 > 10\,000$).

Ne segue che il valore di F_k aumenta inizialmente fino a raggiungere il massimo quando $k = 100$, per poi diminuire da lì in poi fino al termine dei concorrenti.

Problema 4 – Soluzione.

Per ogni k ammissibile, il minimo numero di percorsi da utilizzare per determinare con certezza a_k è due.

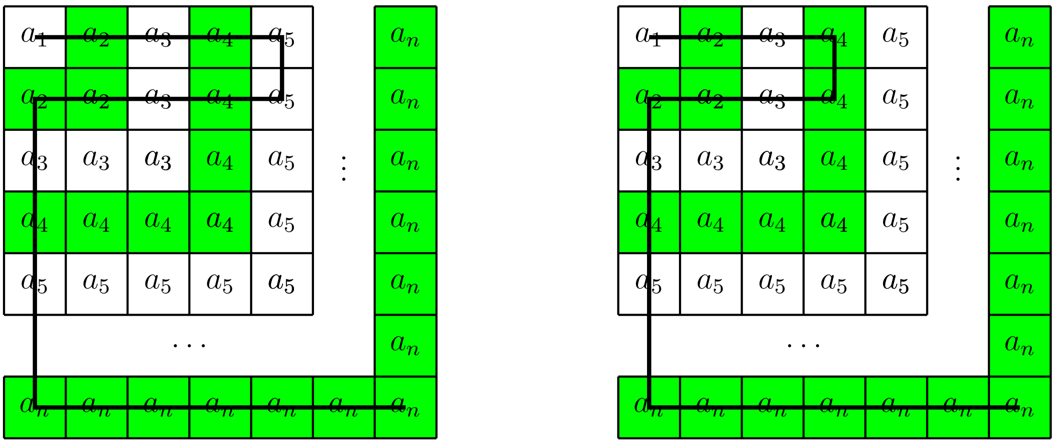
Un percorso non basta Consideriamo un percorso, ed indichiamo con c_i il numero di caselle che contengono il valore a_i attraversate dal percorso. Osserviamo che $c_i \geq 1$ per ogni i e la somma vale

$$S = c_1 a_1 + \ldots + c_k a_k + \ldots + c_{2022} a_{2022}.$$

Ora Barbara conosce i coefficienti $c_1, \ldots, c_{2022}$, e vorrebbe determinare in maniera univoca il numero a_k. Supponiamo di aver trovato questo valore di a_k, e scegliamo un indice $h \neq k$. Si verifica che la somma S non cambia se si sostituisce a_k con $a_k + c_h$, e si sostituisce a_h con $a_h - c_k$, lasciando tutti gli altri a_i invariati. Questo mostra che non vi è mai un unico valore di a_k che sia compatibile con la somma data.

Due percorsi bastano quando $2 \leq k \leq 2022$ Consideriamo il percorso P che percorre la prima riga verso destra fino ad incontrare a_k, poi passa sotto nella seconda riga e torna indietro fino alla prima colonna, quindi si muove verso il basso fino all'ultima riga e infine verso destra fino al traguardo. Consideriamo anche il percorso P' analogo al precedente, con l'unica differenza che il primo "tornante" avviene una mossa prima, cioè quando il percorso arriva alla casella con a_{k-1} (nel caso $k = 2$ questo vuol dire che il percorso P' si muove direttamente verso il basso).

La figura seguente rappresenta i due percorsi nel caso speciale $k = 5$ (per semplicità abbiamo scritto a_n invece di a_{2022}).



Percorso P Percorso P'

L'unica differenza tra i due percorsi è che P ha due caselle con a_k in più. Dette quindi S ed S' le somme sui due percorsi, se ne deduce che

$$S - S' = 2a_k,$$

da cui è immediato ricavare il valore di a_k.

Due percorsi bastano quando $k = 1$ Consideriamo i due percorsi P e P' che partono andando dalla casella iniziale alla casella $(4,4)$ in questo modo.

- Il percorso P fa in successione due spostamenti verso destra, uno verso il basso, uno verso destra, e infine due verso il basso.
- Il percorso P' percorre tutta la prima riga, poi scende nella seconda riga e torna indietro fino alle seconda casella della seconda riga, quindi fa una mossa verso il basso, una verso sinistra, una verso il basso, e infine percorre la quarta riga verso destra fino alla casella $(4,4)$,

Dalla casella $(4,4)$ fino alla fine i due percorsi proseguono allo stesso modo, alternando sempre una mossa verso destra e una verso il basso. In questo modo le due somme risultano

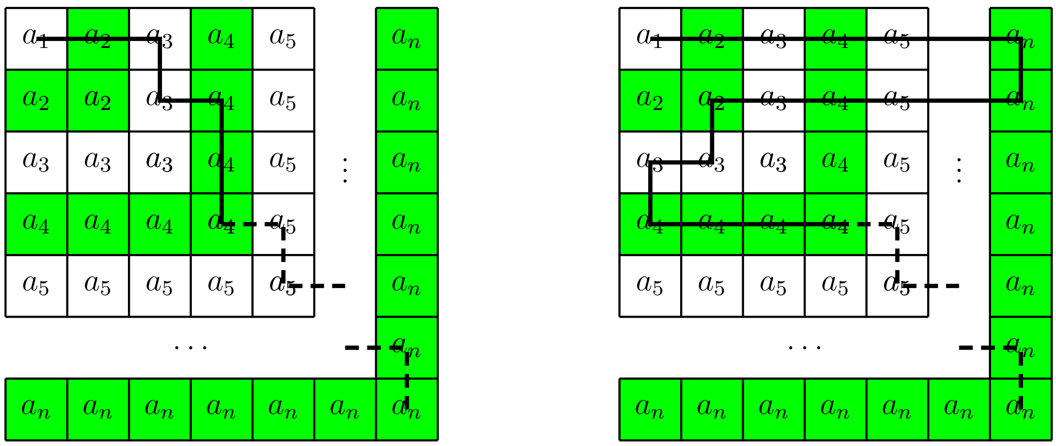
$$S = a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2(a_5 + \ldots + a_{2022})$$

e

$$S' = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 4(a_5 + \ldots + a_{2022}),$$

da cui segue che

$$2S - S' = a_1.$$



Percorso P Percorso P'

Problema 5 – Soluzione.

Risolviamo direttamente il caso generale, dimostrando che un sottoinsieme S è identificabile se e solo se $0 \notin S$ e $101 \in S$. Al termine descriveremo una scorciatoia che funziona nel caso dispari.

Condizione necessaria Dimostriamo intanto che le condizioni $0 \notin S$ e $101 \in S$ sono necessarie. Se per assurdo $0 \in S$ e all'inizio non ci sono palline nei bicchieri, nessun programma può fare comparire una pallina nel bicchiere in posizione 1, come invece sarebbe richiesto. Simmetricamente, se $101 \notin S$ e all'inizio tutti i bicchieri contengono una pallina, allora la configurazione resta la stessa durante tutta l'esecuzione del programma, per cui alla fine ci sarà sicuramente una pallina anche nel bicchiere in posizione 1, il che non dovrebbe succedere in questo caso.

Condizione sufficiente Dimostriamo ora che le condizioni $0 \notin S$ e $101 \in S$ sono sufficienti. Indichiamo con p il numero dei bicchieri che contengono una pallina. Come già osservato, se $p = 0$ oppure $p = 101$, tutte le possibili istruzioni non alterano la configurazione, che in entrambi i casi rispetta da subito la richiesta. Nel seguito supporremo quindi, senza perdita di generalità, che $1 \leq p \leq 100$.

Diciamo che i bicchieri sono disposti in *posizione canonica standard* se i bicchieri con la pallina occupano le posizioni da 1 a p; diciamo che sono disposti in *posizione canonica shiftata* se occupano le posizioni da 2 a $p + 1$. Dimostreremo che esiste un programma eseguendo il quale la configurazione finale sarà quella canonica standard se $p \in S$, e sarà quella canonica shiftata se $p \notin S$ (quindi in particolare ci sarà una pallina nel bicchiere in posizione 1 se e solo se $p \in S$).

Dividiamo il programma richiesto in tre sottoprogrammi. Il primo sottoprogramma passa dalla configurazione iniziale alla configurazione canonica standard. Un modo di realizzare questo è la seguente lista di istruzioni.

- Per ogni i che va da 1 a 101 eseguiamo l'istruzione $(i; i, 1)$. Se da qualche parte c'è una pallina, al termine ci sarà una pallina anche nel bicchiere in posizione 1.

- Per ogni i che va da 2 a 101 eseguiamo l'istruzione $(i; i, 2)$. Se c'è almeno una pallina oltre a quella del bicchiere in posizione 1, al termine ci sarà una pallina anche nel bicchiere in posizione 2.

- Per ogni i che va da 3 a 101 eseguiamo l'istruzione $(i; i, 3)$. Se c'è almeno una pallina oltre a quelle eventualmente presenti nei bicchieri in posizione 1 e 2, al termine ci sarà una pallina anche nel bicchiere in posizione 3.

- Proseguendo allo stesso modo otteniamo il risultato richiesto (più formalmente questo si potrebbe dimostrare per induzione).

Il secondo sottoprogramma passa dalla configurazione canonica standard a quella canonica shiftata. Per far questo eseguiamo l'istruzione $(i; i, i+1)$ per ogni i che va da 100 a 1, procedendo dunque al contrario. Queste istruzioni non fanno nulla fino a quando $i > p$. Quando $i = p$, il bicchiere con la pallina in posizione p viene spostato in posizione $p + 1$, poi quello in posizione $p - 1$ viene spostato in posizione p, e così via finché il bicchiere con la pallina in posizione 1 viene spostato in posizione 2.

Il terzo sottoprogramma parte dalla configurazione canonica shiftata. Dato un intero s, con $1 \leq s \leq 100$, definiamo *s-check* la coppia di istruzioni $(s+1; s+1, 1)$ e $(s+2; s+1, 1)$ (nel caso $s = 100$ la seconda istruzione non ha senso, per cui si esegue solo la prima). Esaminiamo l'effetto di un s-check in tre casi.

- Caso 1. Se siamo nella configurazione canonica shiftata e $s \neq p$, allora sostanzialmente non succede nulla. Più precisamente, se $s > p$ entrambe le istruzioni non trovano la pallina e quindi non fanno nulla, se $s < p$ entrambe le istruzioni trovano la pallina e quindi la seconda annulla l'effetto della prima.

- Caso 2. Se siamo nella configurazione canonica shiftata e $s = p$, allora la prima istruzione porta il bicchiere con la pallina che si trova in posizione $p + 1$ (cioè l'ultimo bicchiere con pallina della fila) in posizione 1, mentre la seconda istruzione non trova la pallina e quindi non fa nulla. Di conseguenza, in questo caso l's-check ha come effetto quello di passare dalla configurazione canonica shiftata alla configurazione canonica standard.

- Caso 3. Se siamo nella configurazione canonica standard e $s < p$, allora non succede nulla, perché gli eventuali scambi avvengono tra bicchieri che contengono una pallina.

Siamo ora pronti a descrivere il terzo sottoprogramma, che esegue l's-check per tutti i valori $s \in S$, procedendo dal più grande al più piccolo. Abbiamo due possibilità.

- Se $p \notin S$, allora siamo sempre nel Caso 1. Pertanto non succede mai nulla, e la configurazione resta quella canonica shiftata, come previsto nel caso $p \notin S$.

- Se $p \in S$, allora non succede nulla fino a quando si testano i valori $s > p$ (Caso 1), poi quando $s = p$ la configurazione diventa quella canonica standard (Caso 2), e poi non succede di nuovo più nulla quando si testano i valori $s < p$ (Caso 3). Pertanto al termine dell'esecuzione la configurazione è quella canonica standard, come previsto nel caso $p \in S$.

Scorciatoia per il caso dispari Nel caso in cui S è l'insieme dei numeri dispari da 1 a 101, allora basta eseguire il primo sottoprogramma (quello che porta i bicchieri in configurazione canonica standard) e poi eseguire l'istruzione $(i; 1, 101)$ per ogni i che va da 2 a 101.

- Se il numero di palline è dispari, lo scambio viene eseguito un numero pari di volte, e quindi alla fine resta la configurazione canonica standard, che ha la pallina nel bicchiere in posizione 1.

- Se il numero di palline è pari, lo scambio viene eseguito un numero dispari di volte, e quindi alla fine il bicchiere in posizione 1 sarà quello che in configurazione canonica standard era in posizione 101, che era vuoto (essendo p pari).

Osservazione Nella soluzione del caso generale si può passare direttamente dalla configurazione iniziale a quella canonica shiftata, senza passare attraverso la canonica standard. Basta eseguire una versione del primo sottoprogramma in cui tutti gli indici sono traslati ciclicamente $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to 100 \to 101 \to 1$, come se la fila iniziasse della posizione 2 per terminare nella posizione 1 "dopo aver fatto il giro".

Problema 6 – Soluzione.

Domanda (a) Indichiamo con O il circocentro di ABC, ed indichiamo con α, β, γ gli angoli di ABC nei vertici A, B, C, rispettivamente.

Il punto fondamentale è che i triangoli IAA_1 e AIO sono congruenti. Per dimostrarlo, osserviamo che $IA = AI$ in quanto si tratta dello stesso lato, e $IA_1 = AO$ per costruzione. Ci basta dunque dimostrare che gli angoli compresi tra queste coppie di lati sono uguali.

Il calcolo di questi angoli è delicato, in quanto dipende dalla configurazione in cui ci troviamo, e più precisamente dalla posizione di O rispetto alle rette AI e BI (ci sono quindi quattro casi da esaminare). Consideriamo il caso, rappresentato nella figura di sinistra, in cui O si trova dalla stessa parte di C rispetto ad entrambe le rette (gli altri casi, uno dei quali è rappresentato nella figura di destra, si trattano in maniera sostanzialmente analoga). In tale configurazione, per calcolare $\angle OAI$ è sufficiente osservare che $\angle IAB = \alpha/2$ (perché AI è bisettrice) e $\angle OAB = 90° - \gamma$ (perché il triangolo AOB è isoscele sulla base AB e ha l'angolo al vertice uguale a 2γ, essendo gli angoli al centro il doppio dei corrispondenti angoli alla circonferenza). Per differenza si ottiene quindi che

$$\angle OAI = \angle OAB - \angle IAB = 90° - \gamma - \frac{\alpha}{2}.$$

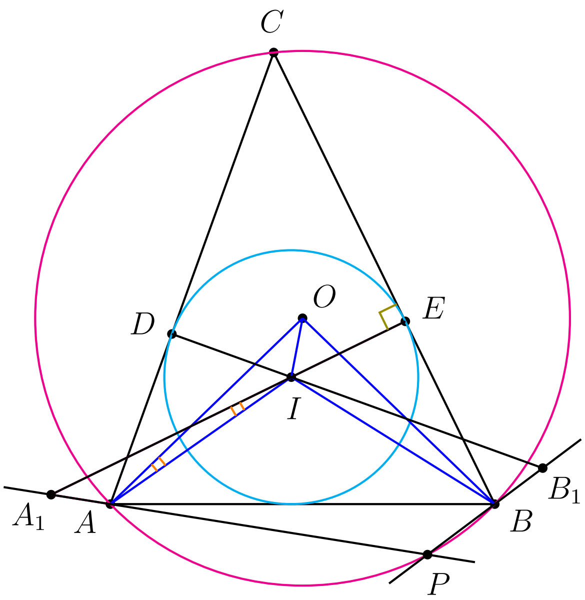
Per il calcolo di $\angle A_1IA$ ricordiamo che la somma degli angoli interni del quadrilatero (non convesso) $AIEC$ deve essere di $360°$, da cui (qui con $\angle AIE$ indichiamo l'angolo del quadrilatero, che è maggiore di $180°$)

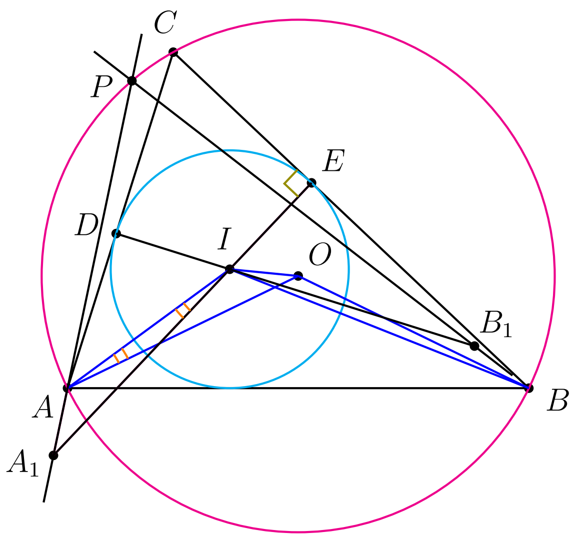
$$\angle AIE = 360° - \angle CAI - \angle IEC - \angle ECA = 360° - \frac{\alpha}{2} - 90° - \gamma,$$

e quindi per differenza

$$\angle A_1IA = \angle AIE - 180° = 360° - \frac{\alpha}{2} - 90° - \gamma - 180° = 90° - \frac{\alpha}{2} - \gamma,$$

il che completa la dimostrazione della congruenza.





Ragionando allo stesso modo dall'altra parte, scopriamo che i triangoli IBB_1 e BIO sono congruenti. A questo punto, dalle due congruenze deduciamo che

$$\angle IA_1P + \angle IB_1P = \angle IA_1A + \angle IB_1B = \angle AOI + \angle BOI = \angle AOB = 2\gamma.$$

Consideriamo ora il quadrilatero A_1PB_1I, e osserviamo che $\angle A_1IB_1 = \angle DIE = 180° - \gamma$ (per la ciclicità di $CDIE$, che ha due angoli opposti retti). Per differenza otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle A_1PB_1 \\ &= 360° - \angle A_1IB_1 - \angle IA_1P - \angle IB_1P \\ &= 360° - (180° - \gamma) - 2\gamma \\ &= 180° - \gamma,\end{aligned}$$

e questo mostra che, in questa configurazione, il punto P sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, dalla parte opposta di C rispetto alla retta AB.

Nella configurazione di destra la dimostrazione è analoga, ma i calcoli sono leggermente diversi. In questo caso avremo che

$$\angle OAI = \angle IAB - \angle OAB = \frac{\alpha}{2} - 90° + \gamma$$

e (indicando questa volta con $\angle AIE$ l'angolo minore di 180°)

$$\angle A_1IA = 180° - \angle AIE = 180° - \left(360° - \frac{\alpha}{2} - 90° - \gamma\right) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°,$$

da cui ancora una volta la congruenza dei triangoli IAA_1 e AIO.

Dalla congruenza deduciamo nuovamente che $\angle IA_1P = \angle IA_1A = \angle AOI$. Diversamente da prima, ragionando dall'altra parte otteniamo ora che

$$\angle IB_1P = 180° - \angle IB_1B = 180° - \angle BOI,$$

da cui

$$\angle IA_1P + \angle IB_1P = 180° - (\angle BOI - \angle AOI) = 180° - \angle AOB = 180° - 2\gamma.$$

Consideriamo ora nuovamente il quadrilatero (questa volta non convesso) A_1IB_1P. Come prima si ha che $\angle A_1IB_1 = \angle DIE = 180° - \gamma$, e quindi $\angle A_1IB_1 = 180° + \gamma$ come angolo non convesso. Per differenza si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle A_1PB_1 \\ &= 360° - \angle IA_1P - \angle IB_1P - \angle A_1IB_1 \\ &= 360° - (180° - 2\gamma) - (180° + \gamma) \\ &= \gamma,\end{aligned}$$

e questo mostra che, in questa configurazione, il punto P sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB.

Osservazione Si può scrivere la dimostrazione in maniera indipendente dalla configurazione utilizzando la nozione di angoli orientati modulo 180°. Ricordiamo che in tale formalismo si indica con $\angle XYZ$ l'angolo che la semiretta YX compie per andare a sovrapporsi alla semiretta YZ ruotando *in senso antiorario* intorno al punto Y, e che tale angolo va interpretato a meno di multipli di 180°. Così, per esempio, $\angle XYZ = -\angle ZYX$, e la somma degli angoli interni di un triangolo o di un quadrilatero è uguale a 0.

Indichiamo i vertici di ABC in senso antiorario, come nelle figure. Si ottiene allora che (si noti che ora queste relazioni valgono sia nella configurazione di sinistra, sia in quella di destra)

$$\angle OAI = \angle OAB - \angle IAB = \gamma - 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

e (sfruttando che la somma degli angoli interni di $AIEC$ è nulla)

$$\angle A_1IA = -\angle AIE = -90^\circ - \gamma - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \gamma - \frac{\alpha}{2}.$$

Questo fatto, unito alle uguaglianze tra i lati osservate precedentemente, mostra che i triangoli IAA_1 e AIO sono "inversamente congruenti", cioè congruenti ma con i vertici che "girano in senso opposto". Dalla congruenza deduciamo che

$$\angle PA_1I = \angle AA_1I = -\angle IOA = \angle AOI,$$

e analogamente $PB_1I = BOI$. Nel quadrilatero A_1IB_1P abbiamo ora che $A_1IB_1 = EID = -\gamma$ (sempre per la ciclicità di $EIDC$), da cui

$$\begin{aligned}
\angle APB &= A_1PB_1 \\
&= -\angle PB_1I - \angle B_1IA_1 - \angle IA_1P \\
&= -\angle BOI + \angle AOI - \gamma \\
&= \angle AOB - \gamma \\
&= 2\gamma - \gamma \\
&= \gamma.
\end{aligned}$$

Questo è equivalente a dire che P sta sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, indipendentemente dalla sua posizione rispetto alla retta AB.

Domanda (b) I possibili valori del perimetro di ABC sono tutti quelli compresi (strettamente) tra 2 e 3.

Per dimostrarlo, osserviamo intanto che P può coincidere con C solo quando siamo in una configurazione come nella figura di destra. Inoltre, i punti A_1, A, C devono essere allineati, il che ci dice che $\angle A_1AI = 180^\circ - \alpha/2$, e di conseguenza (a causa della solita congruenza) anche $\angle AIO = 180^\circ - \alpha/2$. Questo implica che la retta IO è parallela alla retta AB, con I a sinistra di O. Esiste anche una configurazione analoga in cui A_1 è compreso tra A e C e vale l'uguaglianza $\angle A_1AI = \angle AIO = \alpha/2$, che ci dice che la retta IO è parallela alla retta AB con I a destra di O.

In ogni caso, I e O hanno la stessa distanza dalla retta AB. Ora la distanza di I è uguale ad r, cioè il raggio della circonferenza inscritta, mentre la distanza di O è uguale a $R\cos\gamma$ (questo si può vedere osservando che il triangolo isoscele ABO può essere decomposto nell'unione di due triangoli rettangoli con angoli in O pari a γ ed ipotenusa di lunghezza R). Deve quindi valere l'uguaglianza

$$r = R\cos\gamma. \tag{7}$$

Indicando con S l'area e con p il semiperimetro, e ricordando le note formule

$$r = \frac{S}{p}, \qquad R = \frac{abc}{4S}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

possiamo esprimere la relazione precedente come

$$8S^2 = p(a^2+b^2-c^2).$$

Se ora calcoliamo S con la formula di Erone, e semplifichiamo una p, alla fine otteniamo che

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = c(a^2+b^2-c^2),$$

che nel caso $c = 1$ si riduce a

$$(a+b-1)(b+1-a)(1+a-b) = a^2+b^2-1.$$

Ponendo $s = a+b$ e $d = a-b$, possiamo riscrivere l'uguaglianza nella forma

$$\frac{s^2+d^2}{2} - 1 = (s-1)(1-d)(1+d) = (s-1)(1-d^2),$$

da cui con semplici passaggi algebrici otteniamo che

$$d^2 = \frac{s(2-s)}{2s-1}.$$

Siccome $d^2 \geq 0$, da questa relazione è evidente che deve essere $s < 2$ (anche il caso $s = 2$ va escluso perché porterebbe a $d = 0$, cioè ad un triangolo equilatero). D'altra parte è evidente che deve essere anche $s > 1$, perché in ogni triangolo la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo.

Resta da verificare che per ogni $1 < s < 2$ si ottiene un triangolo ammissibile. In tal caso le lunghezze dei due lati BC e CA sono

$$a = \frac{s+d}{2}, \qquad b = \frac{s-d}{2},$$

o viceversa. Sono questi i lati di un triangolo? Basta che ciascun lato sia minore della somma degli altri due. Già sappiamo che $a+b > 1$, ed è ovvio che $a+1 > b$. Resta dunque solo da verificare che $b+1 > a$, ma questa disuguaglianza si riduce a $d < 1$, da cui con semplici passaggi si ritrova ancora una volta la condizione $s > 1$.

Approcci alternativi Si può dedurre la relazione (7) senza passare per il parallelismo di AB e IO. Ad esempio, dopo aver osservato che i punti A_1, A, C devono essere allineati, possiamo considerare il triangolo CA_1E, che sappiamo essere rettangolo in E e con $A_1E = r + R$. Dalla trigonometria dei triangoli rettangoli segue allora che

$$R + r = CE \cdot \tan\gamma \qquad \text{e} \qquad r = CE \tan\frac{\gamma}{2}.$$

Rielaborando queste due identità otteniamo che

$$r + R = r \cdot \frac{\tan\gamma}{\tan(\gamma/2)} = r \cdot \frac{\cos\gamma + 1}{\cos\gamma},$$

che è equivalente alla (7).

Osserviamo infine che si può evitare del tutto l'uso della trigonometria. Ad esempio, dopo aver osservato il parallelismo tra AB e IO, si può calcolare la distanza di O dal lato AB in questo modo. Indichiamo con M il punto medio di AB (che poi è la proiezione di O su AB) e con H il piede dell'altezza di ABC uscente dal vertice A. Allora i triangoli AOM e CAH sono simili, e sappiamo calcolare le lunghezze dei lati di CAH senza usare la trigonometria (come abbiamo fatto nel problema 2).