

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **60 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Stringhe che si annullano

Eigen Man è alle prese con Friday per capire se è possibile sfruttare il regno quantico per viaggiare nel tempo. Eigen Man: «Dammi l'autovalore di quella particella, includendo la decomposizione spettrale. Ci vorrà poco!» Friday: «Non è così semplice! Ogni simulazione richiede di autoannullare una stringa spaziotemporale molto intricata». Nel frattempo sbucca deMorgan, la figlia di Eigen Man: «Papà, cosa vuol dire autoannullare una stringa spaziotemporale?»

Eigen Man: «Signorinella, perché ancora in piedi? Dovresti essere già a dormire! Una stringa spaziotemporale è una stringa di numeri (a_0, \dots, a_k) con $k \geq 3$, tale che $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$ e inoltre abbia la proprietà che $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + k \cdot a_k = 2022$. Autoannullarla vuol dire annullare tutti i suoi elementi eseguendo (anche più di una volta) questa mossa: prendi 4 numeri consecutivi e, da sinistra a destra, aggiungi 3, togli 7, aggiungi 8 e togli 4.»

Friday: «Allora, piccola genio, se sai che posso autoannullarla, quante mosse ci vorranno al minimo?»

2. Stuzzicadenti intrecciati

Convex Hulk, a tavola, si diverte a giocare con degli stuzzicadenti tutti uguali, sovrapponendoli in vari modi sul tavolo e contando i vari rettangoli che abbiano per vertici le intersezioni degli stuzzicadenti e i lati lungo porzioni degli stuzzicadenti stessi. Qual è il numero massimo di rettangoli che riesce a contare se ha a disposizione 2022 stuzzicadenti? Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.

3. Ammissione geometrica

L'area di allenamento dei *sup*-ereroi ha la forma di un triangolo ABC con lati $AB = 30$ m, $AC = 40$ m, $BC = 50$ m, I incentro. Detto M il punto medio di AI , l'asse di AM interseca in X la tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC in A . Per essere ammesso negli Avengers, un candidato deve dire quanto misura, in m^2 , IX^2 .

4. Perdono condizionato

Eigen Man ha deciso che perdonerà Capitan Numerica solo se quest'ultimo risolverà il quesito seguente. Sia p un primo positivo per cui esistono m, n interi tali che $p \mid m$, $\varphi(m) \mid n$, e $\varphi(n) \mid m$, dove φ indica la funzione φ di Eulero. Si dia la somma di tali p . Ricordiamo che se $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, dove p_1, \dots, p_k sono primi positivi distinti e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono interi positivi, $\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1} \dots (p_k - 1)p_k^{\alpha_k - 1}$.

5. Stati quantici

Arctan-man si muove nel regno quantico. Parte da uno stato quantico, che chiamiamo stato-0, e salta tra questo e altri cinque stati quantici, lo stato-1, lo stato-2, stato-3, lo stato-4 e lo stato-5. In ogni salto si sposta su uno degli altri cinque stati con probabilità uniforme e, arrivato nello stato n –esimo (con $0 \leq n \leq 5$) accumula n grammi di tempomateria nel suo corpo. Sapendo che inizialmente non aveva alcun quantitativo di tempomateria in corpo, quanto peserà mediamente al ritorno nello stato quantico di partenza (stato-0)?

6. Meritato riposo

Square Groot ha bisogno di riposo e di crescere sano, per cui Bracket decide di interrare le radici in un terreno di forma triangolare ABC , con ortocentro H , circocentro O ed M punto medio del lato BC . Siano D , E ed F i piedi delle altezze relative ai lati BC , AC e AB rispettivamente, e sia inoltre X , compreso tra A ed H ,

l'intersezione tra la circonferenza circoscritta a EMF e AH . Sapendo che l'area di AHM vale 1332, quanto vale l'area di XMO ?

7. Il Cap non perde colpi

Capitan Numerica, per tenere alto l'umore del gruppo, dimostra di non aver perso le proprie abilità matematiche calcolando il Massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 999^n$ dove n intero positivo. Quale numero ha calcolato?

8. Allenamento di *sup-ereroi*

Eigen Man ha preso Petersen Parker sotto la sua ala e lo allena per farlo diventare un *sup-ereroe*.

Eigen man: «Considera $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio di quarto grado. Dette x_1, x_2, x_3, x_4 le sue radici, sai che $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2x_3x_4$ sono numeri interi in modulo minori o uguali a 57 e che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ è un numero pari. Quanto vale, al massimo, b ?»

9. L'interrogatorio ai soldati [★]

2016 soldati Skrull sono in fila sull'attenti. Tra di loro ci sono alcuni traditori Kree che devono essere scoperti. Capitan Mordell interroga ognuno di loro ed ognuno risponde così: «Tra i miei vicini almeno uno è un Kree o esattamente uno non lo è (o entrambe, chiaramente)». Purtroppo i Kree mentono, mentre gli Skrull sono onesti. Detto N il numero delle possibili stringhe di K e S lunghe 2016, dove con K e S si intende Kree e Skrull rispettivamente, si dia come risposta $N \pmod{60}$.

10. Tesseract [★]

Il Tesseract è un ipercubo quadridimensionale di lato 10. CanThor, come tutti gli esseri umani e gli dei vichinghi, può percepire solo tre dimensioni, per cui si chiede quale sia il volume dell'intersezione tra il Tesseract ed uno spazio tridimensionale che passa per il centro ed è ortogonale ad una diagonale principale.

11. Le gemme dell' ∞ [★]

Lo Spazio, il Tempo e il fluire stesso della nostra realtà sono tenute insieme dalle gemme dell' ∞ : potentissimi artefatti di potere ineguagliabile. Le gemme plasmano la realtà a partire da insiemi di stringhe binarie, cioè parole di lunghezza variabile le cui lettere siano solamente 0 e 1 (ad esempio 0110, 1, 110011 sono stringhe binarie). Un insieme S di stringhe binarie ha la proprietà di essere plasmabile quando, per ogni stringa binaria p che sia prefisso, cioè parte iniziale (eventualmente tutta), di almeno una parola di S valgono le seguenti proprietà:

- se $p \in S$, non ci sono altre parole in S che abbiano p come prefisso;
- se $p \notin S$, esiste almeno una parola in S che abbia prefisso $p0$ ed almeno una parola che abbia prefisso $p1$.

Quanti sono gli insiemi S che hanno la proprietà di essere plasmabili, contengono esattamente 10 stringhe e hanno almeno una stringa che inizia con 1 e una che inizia con 0?

12. Saldare per vincere [★★]

La battaglia contro il temibile esercito di $\tanh(\text{os})$ imperversa e tra le fila degli Avengers militano anche i leggendari guerrieri di QuodEratWakandum della tribù del confine. Ogni guerriero possiede uno scudo di vibranio rettangolare che ha per lati dei numeri interi di piedi wakandiani compresi tra 1 e 40. Ogni scudo S possiede un coefficiente di resistenza $C_S = p^2 - 2A$, dove p è il suo *semiperimetro* ed A la sua area. Due guerrieri possono saldare i loro scudi lungo un lato per formare un superscudo ancora rettangolare, il cui coefficiente di resistenza è il prodotto dei coefficienti di resistenza degli scudi che lo compongono. Un superscudo diventa indistruttibile se il suo coefficiente di resistenza può essere scritto come somma di due quadrati perfetti non nulli. Quanti superscudi diversi sono indistruttibili? *Il superscudo formato con gli scudi (8,12) e (12,3) è lo stesso di (3,12) e (8,12) perché il rettangolo con la saldatura è identico nei due casi, mentre gli scudi (4,8) e (8,4) formano due superscudi diversi e vanno contati due volte.*



Ministero dell'Istruzione

XXIII Gara Nazionale a Squadre

Gara del pubblico – Soluzioni – Sabato
7 Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Stringhe che si annullano	0674
2	Stuzzicadenti intrecciati	8025
3	Ammissione geometrica	0725
4	Perdono condizionato	0017
5	Stati quantici	0015
6	Meritato riposo	0666
7	Il Cap non perde colpi	0900
8	Allenamento di <i>sup</i> -ereroi	9633
9	L'interrogatorio ai soldati [★]	0040
10	Tesseract [★]	1333
11	Le gemme dell' ∞ [★]	4862
12	Saldare per vincere [★★]	2775