

## Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Mai sottovalutare i gatti

Goose sembrava un'innocua gatta rossa ed invece si è rivelata essere della letale specie aliena dei Flessken! Goose ha ingoiato, oltre al Tesseract, anche un ragguardevole numero di nemici Kree. Nick Fouryer li ha contati: sono tanti quanti la somma di tutti i numeri  $abc$  di esattamente tre cifre, non necessariamente distinte, che si scrivono come prodotto di esattamente due primi e tali che  $a + 4b + 7c = 27$ . Quanti Kree ha mangiato Goose?

### 2. Il peso del martello [★]

L'agente del C.A.U.C.H.Y.L.D. Phil Coulson ha trovato il martello di CanThor nel deserto. Vorrebbe portarlo al quartier generale, ma nessuno riesce a spostarlo. L'agente Coulson sa che il peso, in kg, del martello è uguale al numero di coppie di interi positivi  $(a, b)$  tali che  $4 \cdot MCD(a, b) < a + b \leq 2022$ . Quanto pesa il martello?

### 3. Quanti ne rimarranno? [★]

CanThor, Log $\chi$  e Ammodino stanno combattendo i Gb-anti di ghiaccio sulla terra. Alla battaglia partecipano 6 asgardneriani, 17 umani e  $n$  Gb-anti di ghiaccio: ci sono dei rapporti di potenza tra queste razze e in particolare

- Un asgardneriano può uccidere un umano o un Gb-ante;
- Un Gb-ante può uccidere un umano;
- Un umano non può uccidere nessuno.

A causa di una maledizione che si è abbattuta sul campo di battaglia:

- Quando un asgardneriano uccide un Gb-ante, si trasforma in umano;
- Quando un asgardneriano uccide un umano, si trasforma in Gb-ante;
- Quando un Gb-ante uccide un umano, si trasforma in asgardneriano.

Sapendo che a un certo punto non c'è più possibilità che qualcuno uccida qualcun altro, sia  $f(n)$  il massimo numero di personaggi rimasti sul campo. Calcolare  $f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101)$ .

### 4. La creazione del Super Matematico

Il giorno è arrivato: a Steve verrà iniettato il siero del Super Matematico. L'agente Peggy Cartesio controlla che sia tutto a posto nella stanza, che ha la forma di un quadrilatero  $ABCD$ , dove si svolgerà l'esperimento. L'agente sa che l'angolo in  $A$  è ampio 120 gradi, mentre quello in  $D$  è ampio 45 gradi. Sa inoltre che i lati  $AB$  e  $BC$  sono congruenti ed hanno lunghezza intera, inoltre la bisettrice dell'angolo in  $A$  passa per  $C$ . L'agente Cartesio non ricorda l'area della stanza; sa solo che è maggiore di  $1000m^2$ . Quanto vale al minimo l'area (in  $m^2$ )?

### 5. Lo scudo di Capitan Numerica

Lo scudo di Capitan Numerica è stato costruito da Harold Stark. Ha una forma circolare e per tenerlo sono fissate due cinghie in 4 punti della circonferenza esterna  $A, B, C, D$ , in quest'ordine. Le due cinghie sono vanno rispettivamente da  $A$  a  $C$  e da  $B$  a  $D$ , intersecandosi in  $T$ . Sapendo che  $AB = 50cm, BC = 90cm, CD = 100cm, AD = 96cm$ , determinare il rapporto tra  $DT$  e  $TB$ . Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

### 6. L'invasione dei $\chi\tau$ ri [★]

Il malvagio Log $\chi$  è riuscito ad aprire il varco spaziotemporale per permettere ai  $\chi\tau$ ri di invadere la terra: essi sono divisi in 420 battaglioni. Si sa che l' $n$ -esimo battaglione, per ogni  $n$ , è composto da un numero di  $\chi\tau$ ri pari a  $\tau(n)$ , il numero dei divisori interi positivi di  $n$ . Quanti  $\chi\tau$ ri è riuscito a invocare Log $\chi$ ?

## 7. L'hobby di Drax

Drax il Distruttore di Congetture, si sa, sotto sotto è un tenerone che ama gli origami. Questa volta parte da un foglio quadrato  $ABCD$  di lato  $540\text{mm}$ . La prima cosa che deve fare è effettuare una singola piega che porti il vertice  $D$  sul punto  $P$  del lato  $AB$  tale che  $AP = 270\text{mm}$ . In questo modo il lato  $DC$  va ad intersecare il lato  $BC$  nel punto  $Q$ : quanto vale, in  $\text{mm}$ , la lunghezza di  $BQ$ ?

## 8. sup-ereroi ordinati

In fuga da Ultron, gli Avengers si nascondono nella fattoria di Occhio di Calcolo. Per non perdere i propri sup-erpoteri matematici, fanno questo gioco. Dato che sono 11 ed ognuno ha un'altezza diversa da tutti gli altri, si dispongono in fila uno a fianco all'altro in modo che ognuno abbia alla sua sinistra solo persone più basse di lui, oppure solo persone più alte di lui. In quanti modi è possibile farlo?

## 9. Una tabella di particelle $\pi m$

In una tabella quadrata composta da  $101 \times 101$  caselle sono poste delle particelle  $\pi m$ , e in ognuna delle caselle c'è un numero diverso di particelle e ce ne sono di tutte le numerosità da 1 a  $101^2$  nel seguente modo: partendo da un angolo della tabella si trovano in ordine crescente 1 particella, 2 particelle, 3 particelle, prima nelle caselle al bordo andando sempre più all'interno così da creare una spirale a chiocciola di particelle  $\pi m$  con le caselle meno numerose all'esterno e quelle più numerose all'interno. Nella casella al centro della tabella si troveranno dunque  $101^2$  particelle  $\pi m$ . Arctan-man deve ora scegliere 101 caselle in modo che non ce ne siano due nella stessa riga o nella stessa colonna. Successivamente il Prof.  $\pi m$  seleziona, tra le 101 caselle scelte da Arctan-man, quella che contiene il maggior numero di particelle  $\pi m$  e le mette via. Dopo questa doppia procedura di selezione, quante sono al minimo le particelle messe via dal Prof.  $\pi m$ ?

## 10. Silenzio colpevole

Eigen Man ha appena scoperto che fu Winter Solider ad uccidere i suoi genitori. Arrabbiato con Captain Numerica per non averglielo detto, lo mette alle strette con la seguente domanda: quali sono le ultime 4 cifre del numeratore della frazione

$$\sum_{n=2}^{200} \frac{3n+1}{n^3-n}$$

ridotta ai minimi termini?

## 11. Il quartier generale [★]

Sam Weilson, alias Falcon, può volare grazie a delle ali artificiali e dall'alto guarda il quartier generale degli Avengers. La pianta dell'edificio è un triangolo  $ABC$  di lati  $AB = 8$  Cap-metri,  $BC = 17$  Cap-metri e  $CA = 15$  Cap-metri. Vista dall'alto, l'area di atterraggio di elicotteri e sup-ereroi è la circonferenza  $\omega$  inscritta ad  $ABC$ , tangente a  $BC$  in  $D$ . C'è poi un laghetto di forma circolare, che dall'alto è la circonferenza  $\Omega$  ex-inscritta opposta al vertice  $A$ , che tange il lato  $BC$  in  $E$ . Detti  $X$  l'intersezione più vicina ad  $A$  della retta  $AE$  con  $\omega$  e  $Y$  l'intersezione più lontana da  $A$  della retta  $AD$  con  $\Omega$ , Weilson si chiede quanto valga l'area del quadrilatero  $XEYD$  (in Cap-metri quadri).

## 12. L'Occhio di Campigotto

Dottor Stringa è stato scelto dall'Antico per poter diventare il nuovo guardiano dell'Occhio di Campigotto, che contiene la gemma del Tempo. L'Occhio di Campigotto è un amuleto circolare con un diametro tracciato; sulla circonferenza sono poste 4 pietre preziose, 2 agli estremi del diametro tracciato e altre due, sempre diametralmente opposte, a formare un quadrato con le altre. Affinché l'Occhio di Campigotto possa avere la potenza di contenere la gemma del Tempo, se due pietre preziose sono collegate direttamente (o da un quarto di circonferenza o dal diametro), esse devono essere differenti. Per poter padroneggiare l'Occhio di Campigotto, il Dottor Stringa deve sapere esattamente quanti sono i possibili modi di decorarlo, avendo a disposizione 10 tipi di pietre preziose diverse. *Due decorazioni sono considerate equivalenti se gli amuleti corrispondenti sono uguali a meno di una rotazione del piano che contiene l'amuleto stesso.*

## 13. La sfida tra i gladiolimpionici

CanThor è finito sul pianeta di Schwarzaar, dove, per ritornare sulla terra, deve sfidare come gladiolimpionico il campione di Schwarzaar, che si rivela essere il suo collega di lavoro Convex Hulk. Il Gran Maestro pone allora loro il seguente problema: «Cari gladiolimpionici, una successione di polinomi è definita per ricorrenza da  $p_0(x) = 1$  e  $p_{n+1}(x) = (x-7)p_n(x) + p_n(2022)$  per ogni intero non negativo  $n$ . Chi determinerà il più grande intero  $k$  per cui  $8^k$  divide  $p_{2022}(7)$  avrà salva la vita!». CanThor riesce a risolvere correttamente il problema per primo: qual è la sua risposta?

## 14. Nuovi superpoteri

Petersen Parker è stato morso da un ragno ed ha acquisito alcuni super poteri, tra cui quello di muoversi su qualsiasi superficie. Testa la sua nuova abilità arrampicandosi su un edificio di forma cilindrica, avente sulla superficie laterale 2 scanalature parallele alle facce circolari e 3 scanalature verticali parallele all'asse del cilindro. Petersen parte sul piede di una di queste scanalature verticali e, muovendosi solo lungo i solchi o lungo le circonferenze delle

basi, vuole arrivare sulla stessa scanalatura di partenza ma sulla faccia superiore. Può muoversi solo verso l'alto o in senso antiorario. In quanti modi può raggiungere il proprio obiettivo senza mai percorrere due volte lo stesso tratto (ma potendo passare più di una volta in uno stesso punto, anche quello finale)?

#### 15. Per il destino della tribù

Il nuovo re di QuodEratWakandum, T'Chebyshev, ha parlato con Okoye, che gli ha proposto un quesito da cui dipende la pace fra le tribù. Scelto un intero  $m$ , bisogna applicare ripetutamente la seguente procedura: si calcolano, in ordine,  $\frac{2027}{2029}m$ ,  $\frac{2029}{2027}m$ ,  $\frac{1}{10}m$ ,  $\frac{2029}{2}m$ ,  $\frac{2027}{5}m$ ; non appena una di queste operazioni restituisce un intero, si sostituisce  $m$  con il primo intero trovato e si riapplica la procedura. Se nessuno dei valori precedentemente calcolati è un intero, ci si ferma e le tribù si riappacificano. Quanti sono gli interi  $1 \leq m \leq 2022$  che garantiscano la riappacificazione?

#### 16. Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]

Eigen Man verifica le abilità matematiche di J.A.R.V.I.S., l'intelligenza artificiale da lui creata. Scrive al touch screen il polinomio  $x^{2022} + 2x^{2021} + 2^2x^{2020} + \dots + 2^{2020}x^2 + 2^{2021}x + 2^{2022}$ ; J.A.R.V.I.S., in ogni momento, può:

- riscrivere il polinomio scritto al touch screen in un qualunque modo come prodotto di polinomi a coefficienti reali e di grado maggiore o uguale a 1; oppure
- cancellare un fattore di secondo grado  $ax^2 + bx + c$  e sostituirlo con  $(b - c)x + c$ .

Dopo che J.A.R.V.I.S. ha effettuato un certo numero di mosse, Eigen Man legge al touch screen un polinomio  $p(x)$  di primo grado, e si chiede quale sia la soluzione di  $p(x) = 0$ . *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



Ministero dell'Istruzione

# XXIII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Soluzioni – Venerdì 6

Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Mai sottovalutare i gatti	1044
2	Il peso del martello [★]	9862
3	Quanti ne rimarranno? [★]	2245
4	La creazione del Super Matematico	1049
5	Lo scudo di Capitan Numerica	0047
6	L'invasione dei $\chi\tau$ ri [★]	2616
7	L'hobby di Drax	0360
8	<i>sup</i> -ereroi ordinati	1024
9	Una tabella di particelle $\pi$ m	7601
10	Silenzio colpevole	9949
11	Il quartier generale [★]	0161
12	L'Occhio di Campigotto	2880
13	La sfida tra i gladiolimpionici	3368
14	Nuovi superpoteri	0086
15	Per il destino della tribù	0899
16	Eigen Man e J.A.R.V.I.S. [★]	4043