



# XXIII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 7 Maggio

2022



## Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

## Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

### 1. Stuzzicadenti intrecciati

Convex Hulk, a tavola, si diverte a giocare con degli stuzzicadenti tutti uguali, sovrapponendoli in vari modi sul tavolo e contando i vari rettangoli che abbiano per vertici le intersezioni degli stuzzicadenti e i lati lungo porzioni degli stuzzicadenti stessi. Qual è il numero massimo di rettangoli che riesce a contare se ha a disposizione 2022 stuzzicadenti? Dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato.

### 2. Infiltrati Kree [★]

2022 soldati Skrull sono in fila sull'attenti. Tra di loro ci sono alcuni traditori Kree che devono essere scoperti. Capitan Mordell interroga ognuno di loro ed ognuno risponde così: «Tra i miei vicini almeno uno è un Kree o esattamente uno non lo è (o entrambe, chiaramente)». Purtroppo i Kree mentono sempre, mentre gli Skrull sono sempre onesti. Detto  $N$  il numero delle possibili stringhe di K e S lunghe 2022 (dove con K e S si intende Kree e Skrull rispettivamente) che soddisfano gli esiti delle interrogazioni, si dia come risposta  $N \pmod{60}$ , cioè il resto di  $N$  nella divisione per 60.

### 3. Un cono tagliato

Il Dr. Stringa sta lanciando un incantesimo per creare uno scudo mistico attorno ai sup-ereroi. Prima di tutto traccia per terra un simbolo magico composto da un quadrato di lato 10m e dal cerchio circoscritto ad esso. Poi crea una barriera di luce che ha la forma della superficie laterale di un cono retto di altezza 20m, con base il cerchio tracciato. Infine traccia a partire dai lati del quadrato quattro muri dritti perpendicolari al terreno e infinitamente alti. Qual è l'area del "tetto" di questa barriera, composto dalla parte di cono all'interno delle quattro pareti?

### 4. Area relax

Square Groot ha bisogno di riposo e di crescere sano, per cui Bracket decide di interrare le radici in un terreno di forma triangolare  $ABC$ , con ortocentro  $H$ , circocentro  $O$  ed  $M$  punto medio del lato  $BC$ . Siano  $D$ ,  $E$  ed  $F$  i piedi delle altezze relative ai lati  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  rispettivamente, e sia inoltre  $X$ , compreso tra  $A$  ed  $H$ , l'intersezione tra la circonferenza circoscritta a  $EMF$  e  $AH$ . Sapendo che l'area di  $AHM$  vale 2022, quanto vale l'area di  $XMO$ ?

### 5. Un riscaldamento contoso

Appena giunti su Titano, il pianeta natale di tanh(os), Dr. Stringa si accinge a calcolare in quanti dei possibili futuri gli Avengers usciranno vittoriosi. Prima di un calcolo così complicato ha però bisogno di un riscaldamento e chiede ad Eigen Man un problema contoso da risolvere.

Eigen man: «Prova questo! Hai  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  un polinomio di terzo grado. Dette  $x_1, x_2, x_3$  le sue radici, sai che  $x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3$  sono numeri interi in modulo minori o uguali a 51 e che  $x_1 + x_2 + x_3$  è un numero pari. Quanto vale, al massimo,  $b$ ?»

Dr. Stringa: «Elementare! Purtroppo i futuri in cui vinciamo sono molti di meno...»

Qual era la risposta al problema proposto da Eigen Man?

### 6. Il cuore triangolare di una stella morente [★★]

CanThor ha raggiunto NidaVennir e incontrato Ei3 ed è ora pronto a forgiare la sua nuova arma. Per riaccendere la fucina dovrà risvegliare il cuore di una stella morente. La fucina, la stella e la navicella formano un triangolo

rettangolo  $ABC$ , con cateti che misurano 426 e  $120\sqrt{3}$  km. CanThor deve ora scegliere una distanza  $d$  in modo che sia possibile costruire un triangolo equilatero  $A'B'C'$  (anche detto triangolo stellare di fusione, in gergo nanico) tale che  $AA' = BB' = CC' = d$ , in tale modo la stelle potrà rinascere.

CanThor: «Proviamo intanto con una distanza  $d$  di un chilometro»

Ei3: «Così perderai solo tempo, è troppo piccola!»

Qual è il minimo valore di  $d^2$  in chilometri tale che sia possibile riaccendere la stella e forgiare Stormbreaker?

### 7. Energia da dimensioni parallele [★]

Quando Dr. Stringa deve creare uno scudo mistico o lanciare un incantesimo, inizia ad agitare le mani in aria per tracciare rette di pura energia. Durante la battaglia su Titano, Spline-Man osserva Stringa che traccia le sue rette, ma è molto difficile da seguire. Dr. Stringa traccia inizialmente un quadrato  $ABCD$ ; chiamati  $M$  ed  $N$  i punti medi di  $AB$  e  $BC$ , rispettivamente, egli sceglie poi  $P$  e  $Q$  rispettivamente sui segmenti  $NC, BN$ . Dopodiché il mago supremo traccia le rette  $s, r$  passanti per  $A$  e rispettivamente parallele a  $MP$  e  $MQ$ . Poi si focalizza sui punti  $R = s \cap DC$  e  $T = r \cap DC$  ed infine illumina di energia i punti  $S = TQ \cap AB$  e  $G = RP \cap AB$ . E finalmente lo scudo di energia è pronto.

Spline-Man non è riuscito a seguire tutti i passaggi, ma è sicuro che  $RG$  misuri 2017 pollici energetici e  $RT$  ne misuri 2071. Quanto vale  $SG + ST$  (in pollici energetici)?

### 8. L'attacco degli outrider

L'esercito di  $\tanh(\text{os})$  e i suoi seguaci sono giunti nel QuodEratWakandum per uno scontro con il gruppo di Avengers rimasti sulla Terra. Il terreno di battaglia è una scacchiera  $8 \times 8$  e le navicelle del titano pazzo cariche di outrider cominciano a schiantarsi nella casella in basso a sinistra. Un outrider può muoversi solo in alto o a destra sulla scacchiera (e parte da dove è atterrata la sua navicella, cioè in basso a sinistra). Il Dr. Banner, che indossa la Convex Hulkbuster, si domanda quanti siano i percorsi che uno degli outrider può fare tale che termini nella metà superiore del campo di battaglia. Qual è il numero che Banner sta cercando?

### 9. Gemma iperpoligonale

Schuri sta cercando di estrarre la gemma della mente da Visione Prospettica senza ucciderlo. L'alloggiamento della gemma sulla fronte di Visione Prospettica ha la forma di un icosaedro regolare e Schuri sa che deve evidenziare un poligono regolare nell'alloggiamento per effettuare l'estrazione. Quanti sono i poligoni regolari i cui vertici sono anche vertici dell'icosaedro?

### 10. Superscudi della tribù del confine [★★]

La battaglia contro il temibile esercito di  $\tanh(\text{os})$  imperversa e tra le fila degli Avengers militano anche i leggendari guerrieri di QuodEratWakandum della tribù del confine. Ogni guerriero possiede uno scudo di vibranio rettangolare che ha per lati dei numeri interi di piedi wakandiani compresi tra 1 e 20. Ogni scudo  $S$  possiede un coefficiente di resistenza  $C_S = p^2 - 2A$ , dove  $p$  è il suo *semiperimetro* ed  $A$  la sua area. Due guerrieri possono saldare i loro scudi lungo un lato per formare un superscudo ancora rettangolare, il cui coefficiente di resistenza è il prodotto dei coefficienti di resistenza degli scudi che lo compongono. Un superscudo diventa indistruttibile se il suo coefficiente di resistenza può essere scritto come somma di due quadrati perfetti non nulli. Quanti superscudi diversi sono indistruttibili? *Il superscudo formato con gli scudi (8,12) e (12,3) è lo stesso di (3,12) e (8,12) perché il rettangolo con la saldatura è identico nei due casi, mentre gli scudi (4,8) e (8,4) formano due superscudi diversi e vanno contati due volte.*

### 11. Non solo fiori e conchiglie seguono Fibonacci

Cinque anni dopo lo schiocco che ha ucciso metà delle forme di vita dell'universo, alcuni Avengers rimasti si riuniscono telematicamente. Nash-ata: «Carol ti vedremo qui il mese prossimo?» (riferendosi a Captain Mordell) Capitano Mordell: «Improbabile: le cose che accadono sulla terra stanno accadendo ovunque.

La mappa del nostro vasto universo è una griglia  $n \times n$  di celle (con  $n$  intero positivo). Nella prima e seconda cella sono presenti rispettivamente nessuna e una galassia. Inoltre in ognuna delle celle successive è presente la somma delle galassie presenti nelle due celle precedenti (le celle sono ordinate da in alto a sinistra fino in basso a destra, da sinistra a destra in ogni riga)»

Bracket: «Sarebbe proprio un universo interessante se esistessero una riga e una colonna di celle che possiedono lo stesso numero di galassie!». Quanti sono i possibili  $n \geq 1$  per cui la richiesta di Bracket è soddisfatta?

### 12. Autovalori di particelle e stringhe spaziotemporali

Eigen Man è alle prese con Friday per capire se è possibile sfruttare il regno quantico per viaggiare nel tempo.

Eigen Man: «Dammi l'autovalore di quella particella, includendo la decomposizione spettrale. Ci vorrà poco!»

Friday: «Non è così semplice! Ogni simulazione richiede di autoannullare una stringa spaziotemporale molto intricata». Nel frattempo sbuca deMorgan, la figlia di Eigen Man: «Papà, cosa vuol dire autoannullare una stringa spaziotemporale?»

Eigen Man: «Signorinella, perché ancora in piedi? Dovresti essere già a dormire! Una stringa spaziotemporale è

una stringa di numeri  $(a_0, \dots, a_k)$  con  $k \geq 3$ , tale che  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$  e inoltre abbia la proprietà che  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + k \cdot a_k = 2022$ . Autoannullarla vuol dire annullare tutti i suoi elementi eseguendo (anche più di una volta) questa mossa: prendi 4 numeri consecutivi e, da sinistra a destra, aggiungi 4, togli 7, aggiungi 8 e togli 5.»

Friday: «Allora, piccola genio, se sai che posso autoannullarla, quante mosse ci vorranno al minimo?»

### 13. Ant-Man tra stati quantici spaziotemporali

Convex Hulk, sta tentando diversi modi di far viaggiare Ant-man nel tempo, ma senza grandi risultati.

Convex Hulk: «Sembra che il suo corpo stia saltando da uno stato quantico all'altro! Non riesco a controllarlo!»

Captain Numerica: «Puoi riportarlo qui?»

Convex Hulk: «Ci sto lavorando. Arctan-man è partito da questo stato quantico, che chiamiamo stato-0, e sta saltando tra questo e altri tre stati quantici, lo stato-1, lo stato-2 e lo stato-3. In ogni salto si sposta su uno degli altri tre stati con probabilità uniforme e, arrivato nello stato  $n$ -esimo (con  $0 \leq n \leq 3$ ) accumula  $n$  grammi di tempomateria nel suo corpo!»

Nash-ata: «Se i miei calcoli sono corretti, considerando che è partito senza alcun quantitativo di tempomateria in corpo, mediamente al ritorno nello stato quantico di partenza stato-0 peserà. . . »

Instantaneamente Arctan-man riesce a tornare dal regno quantico, tutto intero, interrompendo Nash-ata.

Convex Hulk: «Io questa la considero una vittoria assoluta!»

Quale peso di tempomateria (in grammi) stava per dire Nash-ata prima di essere interrotta?

### 14. Ricerca di gemme disperse [★]

Avendo finalmente capito come viaggiare nel tempo, gli Avengers rimasti si interrogano su come recuperare tutte le gemme. Per massimizzare l'efficienza della missione, devono riuscire a trovare dei luoghi dello spazio e del tempo in cui sono riunite più gemme possibili. Per fare una ricerca sulla posizione delle gemme hanno a disposizione 2022 droni spaziotemporali numerati da 1 a 2022. Ogni drone potrà recarsi in un anno non negativo e strettamente minore di 2022, che chiameremo  $a_i$  (dove  $i$  è l'indice che identifica il drone). L'unico vincolo sul lancio dei droni è che deve esistere un polinomio a coefficienti interi  $p(x)$ , il cosiddetto polinomio lancia-droni-spaziotemporali, tale che, per ogni  $i$ , il numero  $a_i - p(i)$  sia multiplo di 2022.

Bracket: «Quindi in quanti diversi modi possiamo lanciare i droni?»

Eigen Man: «Ovviamente intendi identificare un lancio come una 2022-upla ordinata, visto che i droni sono numerati, giusto?»

Bracket: «Sì, certo! E droni diversi possono anche recarsi nello stesso anno!»

Quale numero  $X$  risponde alla domanda di Bracket?

*Dare come risultato la somma degli esponenti della fattorizzazione in primi di  $X$ .*

### 15. Allineamento di specchi

Eigen Man e il Dr. Banner stanno finendo di progettare la macchina per il viaggio nello spazio tempo attraverso il regno quantico. La macchina è un triangolo  $ABC$  isoscele di base  $AB$ . Sul lato  $BC$  è posto il primo specchio iperriflettore nel punto  $A_1$  (diverso da  $B$ ) tale che  $AA_1 = AB$ ; il secondo specchio è posto sul lato  $AC$  nel punto  $A_2$  (diverso da  $A$ ) tale che  $A_1A_2 = AB$ ; il terzo è invece posto sempre sul lato  $BC$  nel punto  $A_3$  (diverso da  $A_1$ ) tale che  $A_2A_3 = AB$ ; e così via. Per far sì che la macchina funzioni e possa spedire gli Avengers in diversi punti dello spaziotempo, si vuole che il 2022-esimo specchio coincida con il punto  $C$ . Per poter ultimare la costruzione della macchina è necessario conoscere il rapporto tra l'ampiezza dell'angolo al vertice e quella di uno degli angoli alla base. Quanto vale questo rapporto?

*Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 16. Incantesimi più che razionali

Convex Hulk è appena giunto nel 2012 e si reca al Santuario per chiedere a Stringa di consegnargli la gemma del tempo. Appena arrivato, si rende però conto che il Dr. Stringa è ancora un chirurgo in quel passato, ed un altro stregone supremo difende la gemma: L'Antico.

L'Antico: «Bruce, se ti consegno la gemma per salvare la tua realtà, la mia perderà la sua più potente arma contro le forze del male! Ci resteranno solo gli incantesimi. Per ogni numero  $a \in \mathbb{Q}$  noi possiamo scagliare un diverso incantesimo ed il suo indice di efficacia è calcolato come  $\sqrt{3a+7} + \sqrt{12a+5}$ . Ma in assenza della gemma del tempo nell'Occhio di Campigotto, gli unici incantesimi che possiamo scagliare sono quelli con indice di efficacia intero. Come puoi notare con un veloce calcolo, la somma degli indici di efficacia degli incantesimi scagliabili è molto bassa se io ti lascio portare via la gemma»

Quanto vale dunque la somma a cui l'Antico fa riferimento?

### 17. Scontri insoliti

Captain Numerica vuole recuperare lo scettro di  $\text{Log}\chi$  nella Avengers Tower, quando si imbatte nel sé stesso del passato. I due Cap hanno gli stessi schemi di combattimento e sembra impossibile che uno riesca ad avere

la meglio sull'altro. Si muovono costantemente lungo un parallelogramma  $ABCD$ . Il Captain Numerica del futuro ha trovato una mossa imprevedibile, ma per poterla ultimare ha bisogno di calcolare l'ampiezza in gradi dell'angolo  $\widehat{DAC}$ . Finora ha soltanto capito che  $\widehat{DBC} = \widehat{CAB} = 2\widehat{ABD}$ .

Captain Numerica del passato: «Ho tutto il giorno libero!»

Captain Numerica del futuro: «Sì, lo so» e scaglia la mossa vincente.

Qual è l'ampiezza (in gradi) dell'angolo che il Cap del futuro cercava per vincere?

### 18. Viaggio in un passato più remoto

Eigen Man ha perso la possibilità di recuperare il Tesseract nel 2012 e si interroga, insieme a Captain Numerica e Ant-man, su come riuscire a portare a termine la missione. Per farlo deve trovare un anno in cui nello stesso luogo si trovavano sia le particelle  $\pi m$  (il carburante per il viaggio nel tempo) che il Tesseract.

Eigen Man: «Gli unici anni in cui possiamo recarci sono quelli tra l'1 e il 2022 (estremi inclusi) tali che si possano scrivere come differenza di due quadrati di interi *positivi*»

Cap: «Credo di sapere dove andare: una base del C.A.U.C.H.Y.L.D. nel New Jersey»

Eigen Man: «Perfetto, andremo lì!»

In quanti anni possono andare?

### 19. Salti nello spazio

Nash-ata e Occhio di Calcolo hanno appena lasciato NebUlam e War Machine su Morag, nel 2014. Devono ora andare su Vormir per recuperare la gemma dell'Anima. Occhio di Calcolo deve pilotare la Cesenatico (la navicella dei Geometri della Galassia) ma non ha idea di cosa fare. Per fortuna Bracket ha lasciato loro un video tutorial.

Bracket (nel video): «La Cesenatico ha due possibili propulsioni a curvatura spazio-temporale. Con la prima percorrerete 4,3 anni luce per ogni impulso e con la seconda 4,7. Per viaggiare dovrete sempre usare un numero intero di impulsi scegliendo liberamente ad ogni impulso quale propulsione usare. Potete quindi anche usare una propulsione più volte che l'altra. Vi faccio un esempio: voi che vi trovate a Morag e dovete andare a Vormir, che dista 202 anni luce, potete farlo esattamente! Dove con esattamente intendo che arriverete lì precisamente, senza dover tornare indietro. Buona fortuna!»

Nash-ata: «Chissà qual è il minimo numero intero  $N$  tale che tutti i tragitti di lunghezza intera (in anni luce) maggiore o uguale ad  $N$  possano essere percorsi con la Cesenatico?»

Occhio di Calcolo: «Queste domande non fanno per me...»

### 20. Morire di calcoli [★★]

Occhio di Calcolo e Nash-ata sono arrivati su Vormir per recuperare la gemma dell'Anima. Ad accoglierli al tempio c'è Red SkHull: «Qfello che cercate è dafanti a foi, come qfello che temete». Nash-ata: «La gemma è laggìù». Red SkHull: «Per uno di foi; l'altro infece dofrà morire di conti risolvendo qfesto problema:

Siano  $a, b, c$  reali e siano  $u = a^2 + b^2 + c^2$  e  $v = ab + bc + ca$ . Sapete che  $2022u = 2018v + 2025$ . Quanto fale (vale, NdT) al massimo  $37a - 22b - 13c$ ?»

Occhio di Calcolo: «Sappiamo tutti e due chi deve morire». Nash-ata: «A quanto pare...»

Ed entrambi tentano di lanciarsi nel dirupo. Qual è la soluzione del problema proposto da Red SkHull?

### 21. L'universo modulo 79 [★]

Wong chiama a raccolta gli stregoni dei tre santuari per andare a combattere la battaglia finale contro  $\tanh(\text{os})$ . Wong: «Davanti a voi avete due stanze, e in ognuna di esse troverete 39 reliquie distinte e non ci sono reliquie uguali tra le due stanze. Entrate prima nella stanza di destra e prendetene alcune per attaccare il nemico. Entrate poi nella stanza di sinistra e prendetene alcune per difendervi. Il numero di quelle che prendete per difendervi deve essere inferiore a quelle che prendete per attaccare, eventualmente anche 0»

Mentre pronuncia queste parole, Wong si domanda quante combinazioni non ordinate di reliquie si possano ottenere seguendo le istruzioni appena dette. Allora Dr. Stringa, che lo legge nel pensiero, gli dà un consiglio:

Dr. Stringa: «Devi guardare l'universo modulo 79 se vuoi capirlo davvero!»

A quale numero stava pensando Wong? Si risponda indicando la congruenza modulo 79 del risultato.



# XXIII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Soluzioni – Sabato 7  
Maggio 2022



Nr.	Problema	Soluzione
1	Stuzzicadenti intrecciati	8025
2	Infiltrati Kree [★]	0043
3	Un cono tagliato	0300
4	Area relax	1011
5	Un riscaldamento contoso	2601
6	Il cuore triangolare di una stella morente [★★]	7924
7	Energia da dimensioni parallele [★]	4088
8	L'attacco degli outrider	2375
9	Gemma iperpoligonale	0052
10	Superscudi della tribù del confine [★★]	4186
11	Non solo fiori e conchiglie seguono Fibonacci	0003
12	Autovalori di particelle e stringhe spaziotemporali	0337
13	Ant-Man tra stati quantici spaziotemporali	0006
14	Ricerca di gemme disperse [★]	0342
15	Allineamento di specchi	2023
16	Incantesimi più che razionali	0022
17	Scontri insoliti	0105
18	Viaggio in un passato più remoto	1514
19	Salti nello spazio	0180
20	Morire di calcoli [★★]	0045
21	L'universo modulo 79 [★]	0001