Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

Giochi di Archimede 2022

Soluzioni Gara Biennio (versione 211)

Problema 1. La risposta corretta è **(D)**.

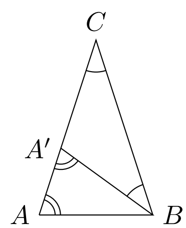
Poiché $3^4 = 81$, se n è un qualsiasi multiplo di 4 la cifra delle unità di 3^n è 1. Lo stesso accadrà per qualsiasi t^n, se t è un numero naturale dove la cifra delle unità è 3. Dato che l'esponente di 2023 nell'espressione considerata, vale a dire 2022^{2021}, è un multiplo di 4, si conclude che la cifra richiesta è 1.

Problema 2. La risposta corretta è **(C)**.

Ad ogni turno, Giulia sistema $2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 13$ perline nelle 5 scatole. Dato che la divisione $2022 : 13$ dà resto 7, la 2022-esima perlina finirà nella stessa scatola dove va la settima, ossia la scatola rossa.

Problema 3. La risposta corretta è **(B)**.

Posto $\alpha = A\widehat{C}B$, si ha $A'\widehat{B}C = \alpha$ ($BA'C$ è isoscele) e quindi $A\widehat{A'}B = 2\alpha$ (angolo esterno del triangolo $BA'C$), per cui $B\widehat{A}C = 2\alpha$ (ABA' è isoscele), come anche $A\widehat{B}C = 2\alpha$. Sommando i tre angoli di ABC, si conlude che $5\alpha = 180°$, vale a dire $\alpha = 36°$.



Problema 4. La risposta corretta è **(E)**.

Prima scegliamo la posizione della cifra 0 (3 possibilità), poi quale cifra, diversa da 0, occupa le altre tre posizioni (9 possibilità). Le possibili scelte sono quindi $3 \cdot 9 = 27$.

Problema 5. La risposta corretta è **(B)**.

Francesco risolve il problema dopo aver fatto i primi 100 dei 101 passi in avanti del 101-esimo tratto di cammino. Dopo il 100-esimo tratto di cammino (che è all'indietro), egli si trovava 50 passi dietro al punto di partenza, quindi, facendo 100 passi in avanti, risove il problema quando si trova 50 passi davanti al punto di partenza, cioè a 30 metri di distanza.

Problema 6. La risposta corretta è **(C)**.

Chiamiamo a e b due numeri naturali che soddisfano la richiesta. Si può supporre che a e b siano primi tra loro. Infatti, se non lo fossero, vi sarebbe almeno un fattore p che li divide entrambi. Dividendo per p quello tra a e b dove tale fattore p compare con molteplicità minore (ad esempio b), si troverebbe che il *mcm* tra a e b/p sarebbe lo stesso di prima, ma la somma $a + b/p$ sarebbe minore di $a + b$ (contrariamente all'ipotesi di partenza). I numeri a e b sono dunque primi tra loro ed il loro *mcm* sarà quindi dato dal prodotto $a \cdot b$.
Si tratta perciò di rendere minima la somma $a+b$ tra le coppie di numeri naturali primi tra loro il cui prodotto è

uguale a 240. Possiamo elencare le coppie di numeri naturali primi tra loro il cui prodotto è $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, semplicemente guardando come si possono suddividere in due gruppi disgiunti i tre fattori $\{2^4, 3, 5\}$: $1 \cdot (2^4 \cdot 3 \cdot 5)$, $3 \cdot (5 \cdot 2^4)$, $5 \cdot (3 \cdot 2^4)$, $2^4 \cdot (3 \cdot 5)$. Le rispettive somme sono $1 + 240$, $3 + 80$, $5 + 48$ e $16 + 15$, tra le quali quest'ultima è quella minima.

Problema 7. La risposta corretta è **(E)**.

Dal momento che in un parallelogramma i lati opposti sono tra loro congruenti, si ha $\overline{PC'} = \overline{D'D}$, $\overline{PD'} = \overline{C'D}$, $\overline{PA'} = \overline{B'B}$, $\overline{PB'} = \overline{A'B}$. Il perimetro di $ABCD$ è dunque uguale alla somma dei perimetri di $AA'PD'$ e $CC'PB'$, ossia $29 + 38 = 67$ metri.

Problema 8. La risposta corretta è **(A)**.

Sommando le tre altezze delle pile formate da due pezzi si ottiene $22 + 30 + 32 = 84$ cm. In questo totale, ciascuna delle altezze è stata sommata due volte, pertanto la somma delle tre altezze è di $84/2 = 42$ cm. Le tre altezze misurano quindi (in cm) $42 - 22 = 20$, $42 - 30 = 12$, $42 - 32 = 10$, che saranno le lunghezze dei tre spigoli di un mattoncino. Il volume è dunque uguale a $20 \cdot 12 \cdot 10 = 2400$ cm^2.

Problema 9. La risposta corretta è **(B)**.

Per ottenere il prodotto 84 nella riga in alto, i tre numeri devono essere 2, 6 e 7, oppure 3, 4 e 7. Per ottenere il prodotto 16 nella colonna di sinistra, i tre numeri devono essere 1, 2, 8. Quindi la riga in alto è necessariamente formata da 2, 6, 7 e nella casella in alto a sinistra deve esserci il numero 2. Nelle 4 caselle non ancora occupate devono esserci quindi i numeri 3, 4, 5, 9. Per fare in modo che le la riga centrale e la riga in basso abbiano somme uguali, dato che una di esse deve iniziare con il numero 1 e l'altra con il numero 8, occorre che una delle due sia formata da 1, 5, 9 e l'altra da 8, 3, 4. Per avere una diagonale dove il prodotto è dispari, dal momento che nella casella in alto a sinistra c'è il 2 (quindi il prodotto su quella diagonale sarà pari), deve essere dispari il prodotto sull'altra diagonale. L'unica possibilità è che la riga in basso sia formata da 1, 5, 9 (con 1 a sinistra), la riga centrale sia formata da 8, 3, 4 (in quest'ordine da sinistra a destra) e la riga in alto sia formata da 2, 6, 7 (in quest'ordine da sinistra a destra). La casella a destra della riga centrale conterrà quindi il numero 4.

2	6	7
8	3	4
1	5	9

2	6	7
8	3	4
1	9	5

Problema 10. La risposta corretta è **(D)**.

Le possibili terne (a, b, c) sono: $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 6)$, $(1, 2, 12)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 3, 12)$, $(1, 4, 12)$, $(1, 6, 12)$, $(2, 4, 12)$, $(2, 6, 12)$, $(3, 6, 12)$. In tutto sono 10.

Problema 11. La risposta corretta è **(A)**.

I numeri da 100 a 999 (estremi inclusi) senza cifre uguali a 4 sono in tutto $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Quelli dove c'è almeno un 4 sono quindi $900 - 648 = 252$.

Problema 12. La risposta corretta è **(E)**.

Per ciascuna delle facce del cubo vi sono $4^2 = 16$ cubetti che hanno una faccia dipinta di blu. In tutto, quindi, sono $6 \cdot 16$ i cubetti con una faccia blu. La probabilità di sorteggiarne una è quindi uguale a $\frac{6 \cdot 16}{6^3} = \frac{4}{9}$.

Problema 13. La risposta corretta è **(B)**.

Si tratta di stabilire quale numero sia scritto nella casella n° 700. La sequenza procede a gruppi di 4 interi consecutivi, in questo modo: $(1, 2, 3, 4)$, $(6, 7, 8, 9)$, $(11, 12, 13, 14)$, e così via. Poiché $700 : 4 = 175$, la richiesta corrisponde a determinare l'ultimo numero della 175-esima quaterna. Da una quaterna alla successiva, l'ultimo numero aumenta sempre di 5 unità. Pertanto, l'ultimo numero della 175-esima quaterna sarà uguale a $4 + 174 \cdot 5 = 874$.

Problema 14. La risposta corretta è **(E)**.

Indicate con a', b', c' le misure delle tre altezze, si ha che le misure a, b, c dei tre lati corrispondenti saranno $a = \frac{2\mathcal{A}}{a'}$, $b = \frac{2\mathcal{A}}{b'}$, $c = \frac{2\mathcal{A}}{c'}$, dove $\mathcal{A}$ indica l'area del triangolo. Nei cinque casi considerati, le terne dei lati dovrebbero quindi essere:

$\left(\frac{2\mathcal{A}}{4}, \frac{2\mathcal{A}}{6}, \frac{2\mathcal{A}}{8}\right)$ $\left(\frac{2\mathcal{A}}{3}, \frac{2\mathcal{A}}{4}, \frac{2\mathcal{A}}{6}\right)$ $\left(\frac{2\mathcal{A}}{3}, \frac{2\mathcal{A}}{4}, \frac{2\mathcal{A}}{8}\right)$ $\left(\frac{2\mathcal{A}}{4}, \frac{2\mathcal{A}}{6}, \frac{2\mathcal{A}}{9}\right)$ $\left(\frac{2\mathcal{A}}{3}, \frac{2\mathcal{A}}{6}, \frac{2\mathcal{A}}{8}\right)$.

Si verifica che: $\frac{1}{4} < \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ $\frac{1}{3} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4} < \frac{1}{6} + \frac{1}{9}$ mentre $\frac{1}{3} > \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$.

I valori 3, 6, 8 non possono dunque essere le misure delle tre altezze di un triangolo, poiché si andrebbe contro la disuguaglianza triagolare.

Problema 15. La risposta corretta è **(A)**.

Immaginando di completare comunque l'estrazione dei 90 numeri, svuotando l'intera urna, l'evento indicato si realizza se e solo se il 90-esimo numero estratto è uno dei 4 che sono presenti in entrambe le cartelle. La probabilità che ciò avvenga è uguale a $\frac{4}{90} = \frac{2}{45}$. È irrilevante se l'estrazione di tale 90-esimo numero avviene cronologicamente per ultima oppure no (o perfino per prima): sono comunque 4 casi favorevoli su 90.

Problema 16. La risposta corretta è **(C)**.

Prima di tutto calcoliamo l'area $[ABC]$ del triangolo ABC. Con il teorema di Pitagora si trova che (in metri) $\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = 6$ e $\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = 15$, da cui $\overline{BC} = 21$ e $[ABC] = \frac{21 \cdot 8}{2} = 84\,\mathrm{m}^2$. L'area cercata $[DEG]$ risulta pertanto (in m^2):

$$[DEG] = \frac{1}{3} \cdot [AEG] = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot [ABG]\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot [ABC]\right)\right) = \frac{1}{16} \cdot [ABC] = \frac{21}{4}.$$