Ministero dell'Istruzione e del Merito

Unione Matematica Italiana

Giochi di Archimede 2022

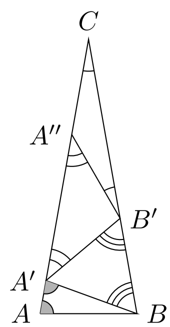
Soluzioni Gara Triennio (versione 311)

Problema 1. La risposta corretta è **(C)**.

Si ha $\left(n+\frac{3}{2}\right)^2 = n^2+3n+\frac{9}{4}$. Il valore ad esso più vicino tra quelli proposti è $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$, dal quale $\left(n+\frac{3}{2}\right)^2$ differisce di $\frac{1}{4}$ qualunque sia n.

Problema 2. La risposta corretta è **(D)**.

Posto $\alpha = A\widehat{C}B$, si ha $A''\widehat{B'}C = \alpha$ ($B'A''C$ è isoscele) e quindi $A'\widehat{A''}B' = 2\alpha$ (angolo esterno del triangolo $B'A''C$), per cui anche $A''\widehat{A'}B' = 2\alpha$ ($A'B'A''$ è isoscele). Segue che $A'\widehat{B'}B = 3\alpha$ (angolo esterno del triangolo $A'B'C$), per cui anche $A'\widehat{B}B' = 3\alpha$ ($BA'B'$ è isoscele). Se ne ricava che $A\widehat{A'}B = 4\alpha$ (angolo esterno del triangolo $BA'C$), da cui $A'\widehat{A}B = 4\alpha$ (ABA' è isoscele), come anche $A\widehat{B}C = 4\alpha$. Sommando i tre angoli di ABC, si conclude che $9\alpha = 180°$, vale a dire $\alpha = 20°$.



Problema 3. La risposta corretta è **(A)**.

Consideriamo due casi possibili.

• La prima cifra è quella diversa dalle altre. In tal caso la prima cifra può essere scelta in 9 modi (non può essere 0) e le tre cifre tra loro uguali sempre in 9 modi (non si può riutilizzare la cifra scelta in precedenza, ma si può usare lo 0): le possibilità sono quindi $9 \cdot 9 = 81$.

• La prima cifra non è quella diversa dalle altre. In tal caso la prima cifra può essere scelta in 9 modi (non può essere 0); la cifra diversa dalle altre può essere scelta sempre in 9 modi e può essere collocata in 3 posizioni differenti: le possibilità sono quindi $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$.

In tutto, ci sono quindi $81 + 243 = 324$ possibilità.

Problema 4. La risposta corretta è **(B)**.

Supponiamo che vi sia un numero di a persone che hanno preso almeno 6 e vi sia un numero b di persone che hanno preso meno di 6. La somma di tutti i voti sufficienti è dunque $7a$ e la somma dei voti non sufficienti è uguale a $4b$. Il fatto che la media compessiva sia uguale 6 equivale ad avere $7a+4b = 6(a+b)$, ossia $a = 2b$. Il numero di chi ha preso meno di 6 è quindi la metà del numero di chi ha preso almeno 6, vale a dire che i primi sono $1/3$ del totale.

Problema 5. La risposta corretta è **(E)**.

Lungo ciascuno degli spigoli del cubo vi sono 4 cubetti con due facce dipinte di blu. Questi costituiscono la totalità dei cubetti con due facce blu, ed inoltre i diversi gruppi di 4 cubetti disposti lungo gli spigoli sono a due a due disgiunti. Dato che gli spigoli di un cubo sono 12, vi saranno $12 \cdot 4 = 48$ cubetti con due facce blu. La probabilità di sorteggiarne uno è quindi $\frac{48}{6^3} = \frac{2}{9}$.

Problema 6. La risposta corretta è **(A)**.

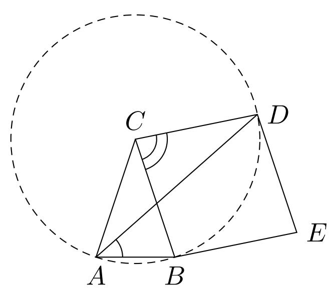
Dal momento che in un parallelogramma i lati opposti sono tra loro congruenti, si ha $\overline{PC'} = \overline{D'D} = \overline{B'C}$, $\overline{PD'} = \overline{C'D} = \overline{A'A}$, $\overline{PA'} = \overline{B'B} = \overline{D'A}$, $\overline{PB'} = \overline{A'B} = \overline{C'C}$. Il perimetro di $ABCD$ è dunque uguale alla somma dei perimetri di $AA'PD'$ e $CC'PB'$, come anche alla somma dei perimetri di $DD'PC'$ e $BB'PA'$. Quest'ultimo perimetro vale quindi $31 + 42 - 49 = 24$ metri.

Problema 7. La risposta corretta è **(D)**.

Posto $b = ka$, dove k è un intero positivo, l'uguaglianza si può riscrivere nella forma $a(1+2k) = 1010$. Quindi $1+2k$ è un divisore maggiore di 1 di 1010, che dovrà essere necessariamente dispari. Il numero 1010 si fattorizza come $2 \cdot 5 \cdot 101$, perciò $1+2k$ può essere uguale a 5, a 101 o a $5 \cdot 101 = 505$, che corrispondono a $k = 2$, $k = 50$, $k = 252$. Si hanno dunque le tre soluzioni $(a, b) = (202, 404)$, $(a, b) = (10, 500)$, $(a, b) = (2, 504)$.

Problema 8. La risposta corretta è **(C)**.

La circonferenza di centro C e raggio $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{DC}$ passa per i punti A, B, D. Per il teorema dell'angolo al centro, $B\widehat{A}D = \frac{1}{2}B\widehat{C}D$. L'angolo $B\widehat{C}D$ è supplementare a $C\widehat{D}E$: esso ha dunque ampiezza pari a 84°, per cui $B\widehat{A}D = 42°$.



Problema 9. La risposta corretta è **(E)**.

Conviene misurare in passi: 30 metri corrispondono a 50 passi di distanza. La prima volta che Francesco raggiunge una nuova distanza (intera) dalla partenza (maggiore di quelle raggiunte in precedenza), ciò avviene sempre al termine di un tratto di cammino in avanti. Più precisamente, la distanza di n passi dalla partenza viene raggiunta per la prima volta al termine del tratto di cammino di $2n-1$ passi in avanti. Il numero di passi fino a quel momento sarà

$$1 + 2 + 3 + ... + (2n-1) = \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = n(2n-1).$$

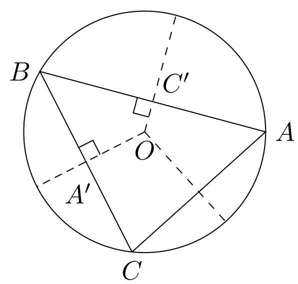
Per $n = 50$, i passi sono dunque $50 \cdot 99 = 4950$.

Problema 10. La risposta corretta è **(A)**.

Si tratta di stabilire quale numero sia scritto nella casella n° 840. La sequenza procede a gruppi di 4 interi consecutivi, in questo modo: $(1,2,3,4)$, $(6,7,8,9)$, $(11,12,13,14)$, e così via. Poiché $840 : 4 = 210$, la richiesta corrisponde a determinare l'ultimo numero della 210-esima quaterna. Da una quaterna alla successiva, l'ultimo numero aumenta sempre di 5 unità. Pertanto, l'ultimo numero della 210-esima quaterna sarà uguale a $4 + 209 \cdot 5 = 1049$.

Problema 11. La risposta corretta è **(B)**.

Le diverse zone d'intervento dei tre porti sono delimitate dagli assi dei lati del triangolo ABC, che concorrono nel centro del lago O. Si tratta di tre settori circolari, le cui ampiezze sono date da angoli al centro supplementari a quelli del triangolo ABC. Tra questi angoli al centro, il più grande è $\widehat{A'OC'}$, quello che contiene il punto B (visto che $\widehat{B}$ è il più piccolo degli angoli di ABC), il quale avrà ampiezza uguale a $180° - 48° = 132°$. La porzione di lago corrispondente sarà quindi pari a $\frac{132}{360} = \frac{11}{30}$ della superficie.



Problema 12. La risposta corretta è **(C)**.

I fattori primi di 1515 sono 3, 5 e 101, che per brevità indicheremo (nell'ordine) con a, b e c. Per esaminare le diverse possibilità, procediamo in base al valore di $MCD(m,n)$, che può contenere tutti e 3, oppure 2, oppure 1 o nessuno dei fattori a, b, c.

- Se $MCD(m,n)$ ha 3 fattori primi: in tal caso $(m,n) = (abc, abc)$ [1 coppia].
- Se $MCD(m,n)$ ha 2 fattori primi, ad esempio ab: in tal caso $(m,n) = (ab, abc)$ [1 coppia, da moltiplicare per 3, considerate le possibili scelte dei 2 fattori primi in comune].
- Se $MCD(m,n)$ ha 1 fattore primo, ad esempio a: in tal caso o si ha $(m,n) = (ab, ac)$ oppure $(m,n) = (a, abc)$ [2 coppie, da moltiplicare per 3, considerate le possibili scelte del fattore primo in comune].
- Infine, se $MCD(m,n) = 1$: in tal caso o i fattori primi sono tutti e 3 insieme, ossia $(m,n) = (1, abc)$, oppure sono 2 da una parte e 1 dall'altra, ad esempio $(m,n) = (a, bc)$ [$1 + 3 = 4$ coppie in tutto].

Nel complesso, le coppie (m,n) con $m \leqslant n$, per cui $mcm(m,n) = 1515$, sono dunque $1 + 3 + 6 + 4 = 14$.

Problema 13. La risposta corretta è **(D)**.

Ogni volta che uno dei due mangia una caramella, la differenza tra le quantità di caramelle presenti nei due sacchetti varia di 3 unità. Dato che all'inizio entrambi hanno un numero di caramelle che è multiplo di 3, anche la differenza iniziale è multipla di 3 e tale rimarrà in tutto il processo, qualunque sia la successione delle azioni. È chiaro che, nella sitazione finale, nessuno può avere più di 1 caramella (se qualcuno ne avesse almeno due, potrebbe mangiarne una e darne un'altra all'amico). Dovendo la differenza essere divisibile per 3, le uniche possibilità sono allora che, alla fine, ne abbiano 1 oppure nessuna a testa. Quest'ultima situazione è tuttavia irrealizzabile: infatti, dopo qualsiasi mossa lecita, chi non ha mangiato la caramella ne riceve una e non potrà quindi trovarsi col sacchetto vuoto. Se ne conclude che nella situazione finale devono avere entrambi una caramella.

Problema 14. La risposta corretta è **(E)**.

Essendo uguale a 36 il prodotto delle due radici, se $p(x)$ ha una radice n (dove n è un intero con $1 \leqslant n \leqslant 999$), l'altra radice dovrà essere $36/n$. Il polinomio corrispondente risulterà in tal caso

$$p(x) \;=\; (x-n)(x-\tfrac{36}{n}) \;=\; x^2 - \left(n + \tfrac{36}{n}\right)x + 36$$

Ciascuno di questi polinomi si ottiene per un'opportuna scelta di k, vale a dire $k_n = n + 36/n$. Tutti questi valori k_n, al variare di $1 \leqslant n \leqslant 999$, sono diversi tra loro, tranne quando n è un divisore di 36. In tal caso, si ha $k_m = k_n$ se e solo se $m \cdot n = 36$. Infatti si verifica che, per $m \neq n$,

$$k_m = k_n \iff m - n = \frac{36}{n} - \frac{36}{m} \iff m - n = 36 \cdot \frac{m-n}{mn} \iff mn = 36$$

Si ha dunque $k_1 = k_{36} = 37$, $k_2 = k_{18} = 20$, $k_3 = k_{12} = 15$, $k_4 = k_9 = 13$. Ciò significa che l'insieme dei possibili $k \in \mathbb{R}$ che danno luogo a quanto richiesto contiene $999 - 4 = 995$ valori.

Problema 15. La risposta corretta è **(C)**.

Immaginando di completare comunque l'estrazione dei 90 numeri, svuotando l'intera urna, l'evento E indicato si realizza se e solo se il 90-esimo numero estratto appartiene a una delle due cartelle mentre l'89-esimo appartiene all'altra. Indicando, per $1 \leqslant n \leqslant 90$, con C_n e L_n gli eventi

C_n: *l'estratto n-esimo è nella cartella di Carlo* $\qquad$ L_n: *l'estratto n-esimo è nella cartella di Luca*,

si avrà quindi che $E = (C_{90} \cap L_{89}) \cup (L_{90} \cap C_{89})$ e pertanto:

$$\mathcal{P}(E) \;=\; \mathcal{P}(C_{90}) \cdot \mathcal{P}(L_{89}|C_{90}) + \mathcal{P}(L_{90}) \cdot \mathcal{P}(C_{89}|L_{90}) \;=\; \tfrac{15}{90} \cdot \tfrac{15}{89} + \tfrac{15}{90} \cdot \tfrac{15}{89} \;=\; \tfrac{5}{89}$$

Problema 16. La risposta corretta è **(B)**.

Notiamo prima di tutto che i triangoli ABC e $A'B'C'$ condividono lo stesso incentro. Infatti, considerato il centro I ed il raggio r (misurato in metri) della circonferenza inscritta in ABC, la circonferenza di centro I e raggio $|r-2|$ sarà tangente ai tre lati di $A'B'C'$. Pertanto, dette $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, nell'ordine, le aree (in m^2) di ABC e di $A'B'C'$, il rapporto $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$ risulterà uguale a $\left(\frac{r-2}{r}\right)^2$, vale a dire $\mathcal{A}' = \left(\frac{r-2}{r}\right)^2 \cdot \mathcal{A}$. Per determinare i valori di $\mathcal{A}$ e r, con il teorema di Pitagora si trova che (in metri) $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = 8$ e $\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} = 20$, da cui $\overline{AC} = 28$ e $\mathcal{A} = \frac{28 \cdot 15}{2} = 210$. Se ne ricava che (sempre in metri) $r = \frac{2\mathcal{A}}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}} = \frac{2 \cdot 210}{70} = 6$ e quindi $\mathcal{A}' = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \cdot 210 = \frac{280}{3}$.