UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio

16 febbraio 2023

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:______________________ Cognome:______________________ Genere: F M

Data di nascita:______________________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Scuola:______________________ Anno di corso: 1 2 3 4 5

Città:______________________

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della mattina, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 14.30. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

(Non sono ammesse correzioni o cancellature)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

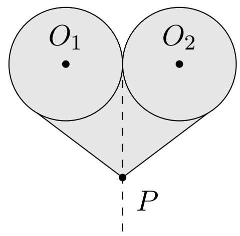
1. Le caselle di una scacchiera 9×10 sono colorate di rosso, verde o blu. Ogni quadrato 3×3 della scacchiera contiene esattamente tre caselle rosse, tre verdi e tre blu. Quante sono al massimo le caselle rosse?

   (A) 32 **(B)** 34 **(C)** 36 **(D)** 39 **(E)** 40

2. In un sacchetto ci sono delle biglie di vari colori. Si sa che tutte le biglie tranne 6 sono gialle, tutte le biglie tranne 7 sono rosse, tutte le biglie tranne 10 sono blu. Inoltre, c'è almeno una biglia blu e potrebbero esserci anche biglie di colori diversi da giallo, rosso e blu. Quante biglie contiene il sacchetto?

   (A) Non è possibile determinarlo **(B)** 11 **(C)** 12 **(D)** 20 **(E)** 23

3. Alice disegna un cuore sul quaderno di matematica come segue: prima disegna due circonferenze di raggio $1cm$ e centri O_1, O_2, tangenti esternamente. Chiamata r la tangente comune alle due circonferenze passante per il punto di contatto, sceglie poi un punto P su r in modo che si abbia $\widehat{O_1PO_2} = 60°$ e traccia le tangenti alle due circonferenze passanti per P. Quanto vale l'area del cuore ottenuto (ovvero l'area ombreggiata in figura) in cm^2?



   (A) $2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$ **(B)** $\sqrt{3} + \pi$ **(C)** $\frac{7}{3}\pi$ **(D)** $\frac{3}{2} + 2\pi$ **(E)** Nessuna delle precedenti

4. Marina riempie le caselle di una griglia 4×4 scrivendo dentro ciascuna il numero 1, il numero 2 o il numero 3. Quanti sono i modi di riempire la griglia tali che la somma di ogni riga e la somma di ogni colonna siano divisibili per 3?

   (A) $3^8 - 1$ **(B)** 3^8 **(C)** $2 \cdot 3^8$ **(D)** 3^9 **(E)** Nessuna delle precedenti

5. Lucio ha due carte identiche di forma rettangolare con lati lunghi 6 e 9; le appoggia sul tavolo in modo che abbiano una diagonale in comune ma non risultino precisamente sovrapposte. Qual è l'area della porzione della prima carta che è coperta dalla seconda?

   (A) 27 **(B)** 36 **(C)** 37 **(D)** 38 **(E)** 39

6. Si consideri il numero $N = 1000\ldots0001$ che consiste nella cifra uno seguita da 2023 zeri, a loro volta seguiti dalla cifra uno. Quanti sono i divisori propri di N (ovvero, i divisori strettamente compresi fra 1 ed N) che si scrivono anch'essi come una cifra 1 seguita da un qualche numero positivo di zeri, seguiti a loro volta da una cifra 1?

   (A) 3 **(B)** 5 **(C)** 12 **(D)** 14 **(E)** 16

7. Per esattamente quattro valori interi di n compresi fra 1 e 10, estremi inclusi, l'espressione $n^9 + 3^{n+1}n^6 + 3^{3n}$ rappresenta un numero primo. Quanto vale la somma di questi quattro valori di n?

   (A) 12 **(B)** 16 **(C)** 18 **(D)** 22 **(E)** 25

8. Dato un cubo di lato 10, consideriamo un piano che passi per esattamente 6 dei punti medi dei suoi spigoli; chiamiamo tali punti A, B, C, D, E, F e supponiamo che i lati dell'esagono $ABCDEF$ giacciano ciascuno su una faccia del cubo. Consideriamo poi un secondo piano contenente il segmento AB e perpendicolare alla faccia contenente AB. Quanto vale il volume della porzione del cubo contenuta fra i due piani?

   (A) 250 **(B)** $\frac{1000}{3}$ **(C)** 375 **(D)** $\frac{1625}{3}$ **(E)** Non esiste un piano con le proprietà richieste

9. La successione a_n è costruita nel modo seguente: a_1, a_2 sono interi compresi fra 1 e 9 (estremi inclusi); per $n \geq 3$, se la somma fra a_{n-1} e a_{n-2} consta di una sola cifra, allora tale somma è il valore di a_n; se invece $a_{n-1} + a_{n-2}$ ha più di una cifra, la somma delle sue cifre sarà il valore di a_n (ad esempio, se $a_4 = 7$ e $a_5 = 8$, allora $a_6 = 6$ in quanto $7 + 8 = 15$ e $1 + 5 = 6$). Quante sono le scelte possibili della coppia (a_1, a_2) tali che si abbia $a_{2023} = 9$?

   (A) 1 **(B)** 3 **(C)** 9 **(D)** 27 **(E)** 81

10. Sia $ABCD$ un parallelogramma tale che la bisettrice uscente da B interseca il lato CD nel suo punto medio M. Il lato BC è lungo 6, e la diagonale AC è lunga 14. Determinare la lunghezza di AM.

    (A) $2\sqrt{19}$ **(B)** $14 - 3\sqrt{3}$ **(C)** $4\sqrt{5}$ **(D)** 9 **(E)** $2\sqrt{22}$

11. Archimede ben sapeva che $\pi \approx 3{,}1416$ può essere approssimato per eccesso dalla frazione $22/7 \approx 3{,}1429$ e che almeno le prime due cifre dopo la virgola sono corrette.

    Per quante coppie di interi (m, n), con $1 < n < 100$, si ha che la scrittura decimale della frazione $\frac{m}{n}$ inizia proprio con 3,14?

    (A) 14 **(B)** 21 **(C)** 48 **(D)** 50 **(E)** Nessuna delle precedenti

12. Una complicata coreografia prevede una fila di 7 ballerine equispaziate su un palcoscenico piano; di fronte a quella delle ballerine vi è una fila identica, parallela, di altrettanti ballerini. La coreografa vuole assegnare a ciascuna ballerina alcuni ballerini in modo che, tracciando sul palcoscenico il segmento che unisce la posizione di ciascuna ballerina a quella dei ballerini a lei assegnati, non vi siano segmenti che si intersecano se non negli estremi. Vuole inoltre che il numero totale di segmenti tracciati sia 13. Quanti sono i possibili modi di effettuare le assegnazioni che soddisfano queste proprietà?

    (A) 128 **(B)** 343 **(C)** 486 **(D)** 924 **(E)** 1716

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Il soggiorno della casa di Filippo ha pianta rettangolare. Filippo ha notato che se attacca l'aspirapolvere alla presa vicino alla porta d'ingresso riesce a pulire tutto il pavimento: questo vuol dire che tutti i punti del pavimento sono a distanza minore di $5m$ dal punto della parete dove si trova la presa. Quanto vale, al massimo, l'area del soggiorno (in m^2)?

14. Su un'isola ci sono 2023 persone in fila indiana, ciascuna delle quali è un furfante o un cavaliere: i cavalieri dicono sempre la verità, mentre i furfanti mentono sempre. Se i è dispari, la persona in posizione i-esima esclama: "Ci sono almeno i furfanti"; se i è pari, la persona in posizione i-esima esclama: "Ci sono esattamente i furfanti". Quanti sono i furfanti?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di base maggiore AB tale che la bisettrice dell'angolo in D passi per B. Supponiamo che la bisettrice dell'angolo in A intersechi il lato BC nel punto P. Dimostrare che $AB = AP$ se e solo se la bisettrice di $\widehat{PAD}$ passa per C.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Un intero positivo n si dice *doppiamente reversibile di tipo* ℓ se esistono due basi consecutive b e $b+1$ tali che n sia rappresentato da numeri palindromi di ℓ cifre sia in base b che in base $b+1$. Ad esempio, 104 è doppiamente reversibile di tipo 3 perché $104_{10} = 404_5 = 252_6$.

(a) Dimostrare che non esistono numeri doppiamente reversibili di tipo 2.

(b) Dimostrare che esistono infiniti numeri doppiamente reversibili di tipo 3.

SOLUZIONE:

Nome:________________ Cognome:________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Data una tabella $2n \times 2n$, un sottoinsieme S delle sue caselle è detto *labirintico* se ha le seguenti proprietà:

- da ogni casella di S è possibile spostarsi in ogni altra casella di S muovendosi solo da caselle di S a caselle di S adiacenti (in orizzontale o verticale, cioè che abbiano un lato in comune con la casella di provenienza);
- non è possibile, partendo da una casella di S, tornare alla stessa casella muovendosi solo verso caselle di S adiacenti e senza mai attraversare due volte lo stesso lato.

(a) Dimostrare che se S è labirintico allora non può avere più di $3n^2$ caselle;

(b) Esibire un insieme di 12 caselle labirintico per $n = 2$.

(c) Chiamiamo *perimetro* di S il numero di lati adiacenti ad almeno una casella di S, ma non a due caselle di S. Se S è labirintico e consta di k caselle, quanto vale il suo perimetro?

(d) Dimostrare che non esiste un insieme di 300 caselle labirintico se $n = 10$.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:
Valentino Badalucco, Giovanni Barbarino, Lorenzo Benedini, Giorgia Benassi, Luigi Amedeo Bianchi, Nicola Caravaggi, Lorenzo Cortesi, Jacopo D'Aurizio, Nikita Deniskin, Daniele Fedeli, Angelo Giustiniani, Giovanni Interdonato, Alessandro Iraci, Giovanni Italiano, Marcello Mamino, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Matteo Migliorini, Riccardo Moraschi, Silvia Pagani, Ludovico Pernazza, Federico Poloni, Matteo Protopapa, Lucio Tanzini, Marco Trevisiol, Federico Viola.

Alessandra Caraceni, Davide Lombardo, Federica Bertolotti, Francesca Rizzo

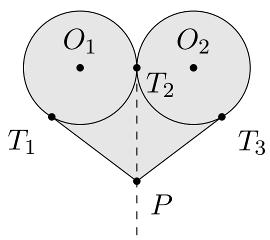
Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(C)**. Consideriamo un quadrato 9×9 della scacchiera, come in figura. Questa sotto-scacchiera può essere coperta con $\frac{9 \times 9}{9} = 9$ quadrati 3×3, ognuno dei quali contiene per ipotesi 3 caselle rosse. Le caselle rosse sono quindi al massimo pari a 36, ovvero 27 (le $9 \cdot 3$ caselle rosse nel quadrato 9×9) più 9 (le caselle esterne al quadrato 9×9). D'altra parte, la colorazione in figura (dove R, V, B stanno per *rosso, verde, blu*) fornisce un esempio in cui le caselle rosse sono esattamente 36.

R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R
R	V	B	R	V	B	R	V	B	R

2. La risposta è **(B)**. Chiamiamo n il numero totale di biglie presenti nel sacchetto. Le biglie gialle sono allora $n - 6$, quelle rosse sono $n - 7$, e quelle blu sono $n - 10$. Dato che potrebbero anche esserci biglie di altri colori, vale la seguente disuguaglianza: $n - 6 + n - 7 + n - 10 \leq n$, che implica $n \leq \frac{23}{2}$. Essendoci almeno una biglia blu, $n \geq 11$, da cui $n = 11$.

3. La risposta è **(A)**. Siano T_1, T_2, T_3 i punti in cui le tangenti da P toccano le due circonferenze, come in figura. Osserviamo che, per note proprietà delle tangenti, gli angoli $\widehat{O_1T_1P}$, $\widehat{O_1T_2P}$, $\widehat{O_2T_2P}$, $\widehat{O_2T_3P}$ sono retti. Notiamo inoltre che i segmenti PT_1, PT_2, PT_3 hanno tutti la stessa lunghezza: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$ perché si tratta dei due segmenti di tangenza da P alla medesima circonferenza, e $\overline{PT_2} = \overline{PT_3}$ per lo stesso ragionamento, applicato all'altra circonferenza.

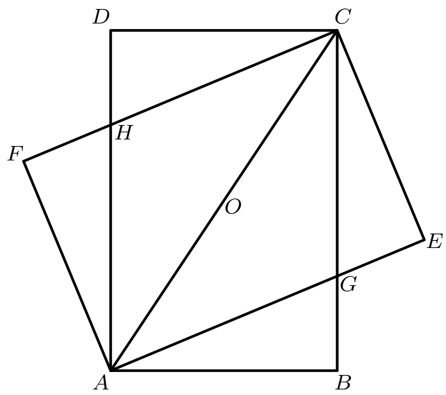
   I triangoli $PT_1O_1, PT_2O_1, PT_2O_2, PT_3O_2$ sono allora tutti congruenti, in quanto ciascuno di essi ha un lato pari ad $1cm$ (i raggi delle circonferenze), un lato pari alla lunghezza $\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \overline{PT_3}$, e l'angolo fra essi compreso uguale a $90°$. Inoltre, l'angolo $\widehat{T_2PO_1}$, data la simmetria della figura, è metà di $\widehat{O_2PO_1} = 60°$, quindi $\widehat{T_2PO_1} = \widehat{T_1PO_1} = 30°$. Nel triangolo PT_1O_1 abbiamo quindi angoli di $30°, 60°, 90°$, il che ci permette di calcolare $\overline{PO_1} = 2\overline{T_1O_1} = 2cm$, $\overline{PT_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PO_1} = \sqrt{3}cm$ e quindi anche l'area del triangolo PO_1T_1, pari a $\frac{1}{2}\overline{PT_1} \cdot \overline{T_1O_1} = \frac{1}{2} \cdot 1cm \cdot \sqrt{3}cm = \frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$.
   La porzione di circonferenza contenuta nell'unione dei triangoli PT_1O_1 e PT_2O_1 è un segmento circolare con angolo al centro $\widehat{T_1O_1T_2} = 180° - \widehat{T_2PT_1} = 120° = \frac{1}{3}360°$, quindi tale area è pari a $\frac{1}{3}\pi(1cm)^2$. Il complementare di questo segmento circolare all'interno della circonferenza è a sua volta un segmento circolare, di angolo al centro $240°$ (e quindi area $\frac{2}{3}\pi\, cm^2$).

   L'area complessiva del cuore è allora data dall'area dei segmenti circolari di estremi T_2T_1 e T_3T_2 e angolo $240°$ (area totale $2 \cdot \frac{2}{3}\pi\, cm^2$), più l'area di quattro triangoli congruenti a PT_1O_1 (ovvero $PT_1O_1, PT_2O_1, PT_2O_2, PT_3O_2$), che come già visto hanno ciascuno area $\frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$. La risposta è quindi $\frac{4}{3}\pi + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$.

4. La risposta è **(D)**. Iniziamo a riempire la sotto-tabella 3×3 in alto a sinistra in un modo a piacere: per ognuna delle 9 caselle abbiamo 3 scelte, dunque in totale 3^9 possibilità. Ora mostriamo che, per ognuna di queste, la scelta delle altre 7 caselle risulta obbligata e sempre possibile.
   Ognuna delle prime tre caselle della quarta riga (siano A, B, C) è chiaramente obbligata in base

alla somma delle tre caselle nella sua stessa colonna, e lo stesso vale per le prime tre caselle della quarta colonna (D, E, F).
Ora l'ultima casella rimasta, in basso a destra, è obbligata dalla somma delle caselle nell'ultima riga e anche dalla somma delle caselle dell'ultima colonna: mostriamo che tali somme lasciano lo stesso resto nella divisione per 3, il che ci consente di concludere. Chiamando S la somma dei 9 numeri scelti all'inizio, $A+B+C+S$ è multiplo di 3, così come $D+E+F+S$, ma allora $A+B+C$ e $D+E+F$ lasciano lo stesso resto nella divisione per 3, come volevamo. In particolare, nell'angolo in basso a destra può andare solo il resto di S nella divisione per 3 (così facendo, la somma delle colonne sulla quarta riga ha lo stesso resto nella divisione per 3 di $A+B+C+S$, cioè 0, e similmente per la quarta colonna).
Dunque per ognuna delle 3^9 scelte iniziali c'è uno e un solo completamento funzionante, quindi la risposta è 3^9.

5. La risposta è **(E)**.



Il problema chiede di calcolare l'area di $AGCH$. Dimostriamo che tale quadrilatero è un rombo. Detto O il punto medio di AC, questo è centro di simmetria sia per il rettangolo $ABCD$ che per il rettangolo $AECF$, quindi è centro di simmetria anche per $AGCH$ che quindi è un parallelogramma. Basta quindi dimostrare che due lati adiacenti di $AGCH$ sono congruenti. Si considerino i triangoli AFH e HDC. Questi sono due triangoli rettangoli i cui angoli in H sono angoli opposti al vertice, quindi congruenti. Per differenza, si ha che tutti e 3 gli angoli sono congruenti, quindi i triangoli sono simili.
Inoltre FA e DC sono congruenti per ipotesi, quindi i due triangoli sono simili con un lato corrispondente congruente, quindi sono congruenti, e di conseguenza $\overline{HC} = \overline{HA}$. Detta l la lunghezza di HC, applicando il teorema di Pitagora sul triangolo DCH si ha:

$$l^2 = (9-l)^2 + 36$$

Sviluppando si ottiene $l^2 = 81 - 18l + l^2 + 36$, da cui $l = \frac{13}{2}$. L'area di $AGCH$ è data quindi da $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = 6 \cdot \frac{13}{2} = 39$.

6. La risposta è **(A)**. Osserviamo che $N = 10^{2024}+1$ e che un suo divisore del tipo richiesto si scrive come $10^n + 1$ per qualche $1 < n < 2024$. Assumiamo quindi che $10^n + 1$ divida N e scriviamo

$$N = 10^{2024} + 1 = (10^n + 1)(10^{2024-n}) + r_1\,,$$

da cui $r_1 = -(10^{2024-n} - 1)$. Poiché N è divisibile per $10^n + 1$, anche r_1 è divisibile per $10^n + 1$. Ripetendo lo stesso procedimento, si ottiene

$$-r_1 = 10^{2024-n} - 1 = (10^n + 1)(10^{2024-2n}) + r_2\,,$$

da cui $r_2 = -(10^{2024-2n} + 1)$ è divisibile per $10^n + 1$ (sostanzialmente stiamo facendo una specie di divisione in colonna, in cui però permettiamo al resto di essere negativo).

Iterando il ragionamento si ottiene che $10^{2024-2kn} + 1$ è multiplo di $10^n + 1$ per ogni k per cui $2024 - 2kn$ è positivo, e similmente $10^{2024-(2k+1)n} - 1$ deve essere multiplo di $10^n + 1$ per ogni k tale che $2024 - (2k+1)n$ è positivo. In particolare, scegliendo k opportunamente possiamo far sì che $2024 - 2kn$ o $2024 - (2k+1)n$ sia positivo e minore o uguale ad n (si tratta sostanzialmente di svolgere la divisione con resto fra 2024 ed n): otteniamo allora che $10^n + 1$ divide un numero della forma $10^a \pm 1$ con $1 \le a \le n$. Se a fosse strettamente minore di n, chiaramente $10^a \pm 1$ sarebbe minore di $10^n + 1$, e quindi non potrebbe essere un suo multiplo. Deve quindi accadere che $a = n$ e che il segno sia positivo, il che succede solo se $n = 2024 - 2kn$, cioè $2024 = (2k+1)n$. Quindi n dev'essere un divisore proprio di 2024 con la proprietà che $2024/n$ sia dispari, ovvero $n = 2^3 d$, dove d è un divisore proprio di $2024/2^3 = 253 = 11 \cdot 23$. Ci sono quindi 3 possibilità: $n = 2^3, n = 2^3 \cdot 11, n = 2^3 \cdot 23$.

7. La risposta è **(B)**. Se $n = 3k$ con k intero, chiaramente $n^9 + 3^{n+1}n^6 + 3^{3n}$ è divisibile per 3 e quindi per $n = 3, 6, 9$ l'espressione non rappresenta un numero primo.

   Supponiamo invece che valga $n = 3k + 1$ con k intero. Allora

   $$n^9 + 3^{n+1}n^6 + 3^{3n} = (3k + 1)^9 + 3^{3k+2}(3k + 1)^6 + 3^{9k+3}\,.$$

   Quest'espressione è della forma $a^3+3a^2b+b^3$, con $a = (3k+1)^3$ e $b = 3^{3k+1}$. Possiamo completare il cubo, ottenendo

   $$a^3 + 3a^2b + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3b^2a = (a + b)^3 - 3b^2a$$

   e dalla definizione di a e b segue che $3b^2a = (3^{2k+1}(3k + 1))^3$. Ricordando ora che in generale si ha $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + yx + y^2)$, si ottiene che

   $$(a + b)^3 - 3b^2a = \left(a + b - 3^{2k+1}(3k + 1)\right)\left((a + b)^2 + 3^{2k+1}(3k + 1)(a + b) + 3^{4k+2}(3k + 1)^2\right)\,.$$

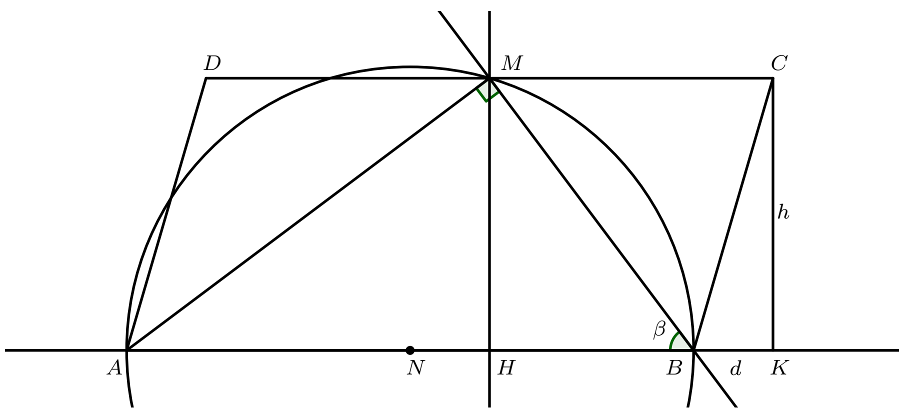
   Si verifica facilmente che per $k = 1, 2, 3$ entrambi i fattori sono strettamente maggiori di 1 e dunque per $n = 4, 7, 10$ l'espressione $n^9 + 3^{n+1}n^6 + 3^{3n}$ non rappresenta un numero primo. Per esclusione, con $n =$ 1,2,5,8 si ottengono quattro numeri primi. La risposta è quindi $1+2+5+8 = 16$.

8. La risposta è **(C)**. Sia V il volume che si vuole calcolare, e siano rispettivamente X il volume della porzione di cubo tagliata dal piano passante per i 6 punti medi e Y il volume della regione tagliata dal piano perpendicolare alla faccia contenente AB. Si ha quindi $V + X + Y = l^3$, dove $l = 10$ è il lato del cubo. Si può vedere che $X = \frac{l^3}{2}$; infatti ogni piano passante per il centro di un cubo seziona il cubo in due parti uguali: per dimostrare questo si può fare una simmetria centrale per il centro del cubo e notare che il piano viene mandato in se stesso (in quanto il punto rispetto al quale stiamo facendo la simmetria appartiene al piano), il cubo viene pure mandato in se stesso (perché stiamo simmetrizzando rispetto al suo centro), ma le due parti del cubo che sono divise dal piano si scambiano (questo si vede facilmente guardando come si comportano i vertici del cubo). Y invece è il volume di un prisma di altezza l la cui base è un triangolo rettangolo isoscele di lato $\frac{l}{2}$ che quindi ha area $\frac{l^2}{8}$. Si ha dunque $Y = \frac{l^3}{8}$, di conseguenza

   $$V = l^3 - \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{8} = \frac{3}{8}l^3 = 375.$$

9. La risposta è **(C)**. Osserviamo che per $n \geq 3$, a_n è il numero in $\{1, \ldots, 9\}$ dato dal resto della divisione per 9 di $a_{n-2} + a_{n-1}$ (dove 9 rappresenta resto 0). In particolare, a_{n-2} è il resto (come sopra, preso in $\{1, \ldots, 9\}$) nella divisione per 9 di $a_n - a_{n-1}$. Ponendo $a_{2023} = 9$, per ciascuna delle 9 scelte possibili del valore di a_{2022}, il valore di a_{2021} è determinato, e similmente sono determinati tutti gli altri valori della successione: queste 9 scelte dunque ci portano a 9 scelte possibili della coppia (a_1, a_2).

10. La risposta è **(C)**.



Osserviamo che il triangolo MBC è isoscele di base MB: infatti $\widehat{CBM} = \widehat{MBA}$, per ipotesi, e $\widehat{ABM} = \widehat{BMC}$, in quanto sono angoli alterni interni rispetto le parallele $DC//AB$. Da cui

$$\overline{AB} = \overline{DC} = 2\overline{MC} = 2\overline{CB} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Chiamiamo K la proiezione di C su AB e poniamo $h = \overline{CK}$ e $d = \overline{BK}$. Troviamo h e d attraverso il sistema

$$\begin{cases} \overline{BC}^2 - h^2 = d^2 \\ \overline{AC}^2 - h^2 = (\overline{AB} + d)^2 \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene $d = 2/3$ e $h = 8\sqrt{5}/3$.

Detta H la proiezione di M su AB, si ha

$$\overline{AH} = \overline{AB} + \overline{BK} - \overline{HK},$$

dove $\overline{HK} = \overline{MC}$ (perché $HKCM$ è un rettangolo per costruzione) e $\overline{AB} = 2\overline{MC}$. Ne segue che $\overline{AH} = \overline{MC} + d = 20/3$ e $\overline{AM}^2 = (\overline{AH})^2 + h^2 = 80$. Di conseguenza $\overline{AM} = 4\sqrt{5}$.

Seconda soluzione. Come prima abbiamo $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Osserviamo che il triangolo ABM è rettangolo in M: infatti, detto N il punto medio di $\overline{AB}$, si ha $\overline{NM}//\overline{BC}$, quindi $\overline{NM} = \overline{AN} = \overline{NB} = 6$, perciò M sta su una circonferenza di raggio 6 centrata in N e in particolare l'angolo in M è retto. Detto β l'angolo $\widehat{ABM}$, si ha $\overline{AM} = \overline{AB} \sin\beta = 12 \sin\beta$. Conoscendo i lati del triangolo ABC possiamo ricavare $\cos(2\beta)$ con il teorema di Carnot: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cos(2\beta) = \overline{AC}^2$, da cui $\cos(2\beta) = -1/9$. Grazie alla formula di addizione del coseno possiamo ricavare $\sin\beta$ dall'equazione $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$, da cui $\sin\beta = \sqrt{5}/3$. Dunque $\overline{AM} = 12 \cdot \sqrt{5}/3 = 4\sqrt{5}$.

Terza soluzione. Dalla formula di Erone si ricava che l'area del triangolo ABC è $16\sqrt{5}$. Quest'area è anche uguale all'area di ABM, che a sua volta è il doppio dell'area di ANM. Detta $2x$ la lunghezza di $\overline{AM}$, si deve avere $1/2 \cdot 2x \cdot \sqrt{6^2 - x^2} = 1/2 \cdot 16\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$. Elevando ambo i membri al quadrato e risolvendo per x^2 si trova $2x = 4\sqrt{5}$.

11. La risposta è **(C)**. Occorre contare le coppie (m, n) tali che $314/100 \leq m/n < 315/100$. Equivalentemente, vogliamo determinare quante sono le coppie (m, n) tali che $14/100 \leq (m - 3n)/n < 15/100$. Definiamo $k = m - 3n$ e contiamo le coppie (k,n) tali che $14/100 \leq k/n < 15/100$. Poiché $n < 100$, $k < 15n/100 < 15$. Consideriamo, quindi, separatamente, i casi $k = 1, 2, \ldots, 14$. Per ogni tale k, riscrivendo le disguaguaglianze, vogliamo contare quanti sono gli interi $n < 100$ tali che

$$\frac{100}{15}k < n \leq \frac{100}{14}k,$$

cioè

$$-\frac{k}{3} < (n - 7k) \leq \frac{k}{7}.$$

Dunque basta contare, per ciascuno di questi intervalli $(-k/3, k/7]$, quanti sono gli interi che contiene. Per $k = 1,2,3,\ldots,14$ ne abbiamo rispettivamente $1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7$. Tuttavia, per $k = 14$, non ci è consentito contare $n = 100$. Dunque la risposta è $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 6 + 7 - 1 = 48$.

Seconda soluzione. Come sopra, vogliamo contare le coppie (m, n) tali che $314/100 \leq m/n < 315/100$. Stiamo dunque contando il numero di punti a coordinate intere (m,n) nel piano soggetti alle condizioni:

$$314n - 100m \leq 0, \qquad 315n - 100m > 0, \qquad 0 < n < 100.$$

I punti che soddisfano tali condizioni formano un triangolo di vertici $O = (0,0)$, $A = (314,100)$, $B = (315,100)$, incluso il segmento OA, ma esclusi gli altri due. I punti aventi coordinate intere interni a un segmento che ha un vertice nell'origine sono i multipli della coppia di coordinate dell'altro vertice, una volta ridotte ai minimi termini. Dunque per OA sono $\mathrm{MCD}(314,100) - 1 =$

1, per AB sono MCD(315 − 314,100 − 100) − 1 = 0, per OB sono MCD(315,100) − 1 = 4. Per il teorema di Pick sul triangolo OAB,

$$a = i + \frac{b}{2} - 1,$$

dove $a = 100 \cdot (315-314)/2$ è l'area di OAB, i è il numero di punti a coordinate intere all'interno di OAB e $b = 3+1+0+4$ è il numero di punti a coordinate intere sul bordo di OAB; perciò $i = 47$. La risposta è data dai punti interni a OAB e quelli interni al segmento OA, cioè $i + 1 = 48$.

12. La risposta è **(D)**. Immaginiamo per comodità le ballerine ed i ballerini disposti in orizzontale, da sinistra a destra. La condizione del testo può essere tradotta nella maniera seguente. Chiamiamo B_i l'insieme dei ballerini che vengono assegnati alla i-esima ballerina, con $i = 1, \dots, 7$. Per rispettare la condizione del testo (il fatto che i segmenti non si incrocino), i ballerini in B_2 devono stare tutti alla destra di quelli in B_1 (salvo che il ballerino più a destra di B_1 può coincidere con il ballerino più a sinistra di B_2), e così via: i ballerini in B_3 stanno tutti a destra di quelli in B_2 (salvo che l'ultimo a destra di B_2 può coincidere con il primo a sinistra di B_3), quelli di B_4 a destra di quelli B_3, eccetera. In particolare, ogni insieme B_i interseca in al più un elemento B_{i-1} e in al più un elemento B_{i+1} (ammesso che $i - 1 \geq 1$ e $i + 1 \leq 7$). Il numero totale di ballerini assegnati, ovvero il numero totale di segmenti tracciati, è

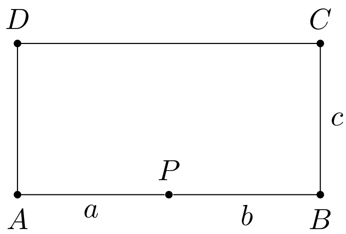
$$13 = |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_7| \leq |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_7| + 6,$$

dove la disuguaglianza vale appunto perché i ballerini in comune fra i vari insiemi sono al massimo 6 (uno fra B_1 e B_2, uno fra B_2 e B_3, ...). In particolare, $|B_1 \cup \cdots \cup B_7|$ dev'essere maggiore o uguale a 7, cioè ogni ballerino è assegnato ad almeno una ballerina. L'uguaglianza $13 = |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_7|$ implica inoltre che B_1 ha effettivamente un elemento in comune con B_2, il quale ha un elemento in comune con B_3, e così via fino a B_7 (questo giustifica in particolare anche il fatto, usato implicitamente nella descrizione precedente, che nessuno degli insiemi B_i è vuoto).

Osserviamo poi che un insieme B_i non può avere 'buchi', ovvero è formato da una fila di ballerini adiacenti (precisamente: se contiene due ballerini, contiene anche tutti quelli compresi fra loro). Infatti, se due ballerini sono entrambi assegnati ad una stessa ballerina, allora tutti i ballerini fra essi compresi possono essere assegnati solo alla *medesima* ballerina (per rispettare la condizione che i segmenti non si incrocino). Siccome abbiamo già osservato che ogni ballerino deve essere assegnato ad *almeno* una ballerina, concludiamo come voluto che ogni insieme B_i è costituito da ballerini fra loro adiacenti.

Sulla base di tutte queste osservazioni otteniamo allora che alla prima ballerina sono assegnati tutti i ballerini dal primo all'i_1-esimo (per un certo $i_1 \in \{1, \dots, 7\}$); alla seconda, tutti quelli dall'i_1-esimo all'i_2-esimo (per uno certo $i_2 \in \{1, \dots, 7\}$), e così via fino alla settima ballerina, a cui sono assegnati i ballerini da i_6 ad $i_7 = 7$. Per descrivere la situazione è quindi sufficiente conoscere i numeri $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_6$ (in quanto sappiamo già che $i_7 = 7$). Possiamo pensare ad una tale collezione di numeri come ad una funzione f da $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, con la condizione che essa sia *debolmente crescente*, ovvero che $f(x+1) \geq f(x)$ per $x = 1, \dots, 6$. Conoscere f è poi equivalente a conoscere la funzione g che manda x in $f(x)+x$, la quale è ora *strettamente* crescente (ovvero $g(x+1) > g(x)$) e prende valori nell'insieme $\{2, 3, \dots, 7+6 = 13\}$. Infine, data la condizione di essere strettamente crescente, una tale funzione è completamente determinata dalla conoscenza dei 6 elementi della sua immagine (dati 6 numeri distinti in $\{2, \dots, 13\}$, c'è un'unica funzione *strettamente crescente* $\{1, \dots, 6\} \to \{2, \dots, 13\}$ che li assume come valori). Concludiamo quindi che il numero cercato è il numero di sottoinsiemi di $\{2, \dots, 13\}$ aventi 6 elementi, ovvero $\binom{12}{6} = 924$.

13. La risposta è 25. Consideriamo il rettangolo che forma la pianta del soggiorno, e orientiamolo in modo che la presa P si trovi sul lato orizzontale AB, suddividendolo in due segmenti di lunghezza a e b. Chiamiamo inoltre c la lunghezza dei due lati verticali BC e DA, come in figura. In questo modo, l'area del soggiorno è $ac + bc$.



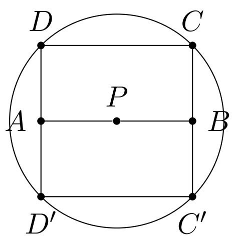
Perché i vertici C e D siano a distanza minore o uguale di 5 da P, dobbiamo avere $\sqrt{b^2+c^2} \leq 5$ e $\sqrt{a^2+c^2} \leq 5$, rispettivamente. Per una nota disuguaglianza abbiamo $ac \leq \frac{a^2+c^2}{2}$, con uguaglianza quando viene scelto $a = c$, e analogamente $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$. Combinando queste disuguaglianze otteniamo che l'area di $ABCD$ è

$$ac + bc \leq \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} \leq \frac{5^2}{2} + \frac{5^2}{2} = 25.$$

Per verificare che questa è davvero l'area massima, vogliamo costruire una configurazione in cui tutte queste disuguaglianze diventino uguaglianze. Vogliamo quindi avere in particolare $a = c$ e $25 = a^2 + c^2 = 2a^2$, e risolvendo si ha $a = c = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Allo stesso modo si ottiene $b = c = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Effettivamente scegliendo $a = b = c = \frac{5}{\sqrt{2}}$ tutti i punti interni al rettangolo distano da P al più $\frac{5}{\sqrt{2}}$ sia lungo l'asse orizzontale che lungo quello verticale, quindi hanno distanza da esso al più

$$\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Seconda soluzione. Consideriamo i punti C' e D' che si ottengono riflettendo C e D rispetto al lato AB.



Allora il rettangolo $CDD'C'$ (che ha area doppia rispetto a $ABCD$) sta all'interno del cerchio di centro P e raggio 5. Quindi trovare il massimo dell'area di $ABCD$ è equivalente a costruire il rettangolo di area massima che sta all'interno di un cerchio, ed è noto che esso è il quadrato. Si ha allora $\overline{CD} = \overline{DD'} = \overline{D'C'} = \overline{C'C}$, e ne concludiamo che AD, BC devono essere lunghi la metà di CD.

14. La risposta è 1348. Se i furfanti sono in numero dispari, diciamo $2m+1$, allora le persone che dicono la verità sono tutte e sole quelle in posizioni dispari minori o uguali di $2m+1$, che sono $m+1$. Ci sarebbero quindi $2m+1$ furfanti e $m+1$ cavalieri, per un totale di $3m+2$ persone, ma ciò è impossibile poiché l'equazione $2023 = 3m+2$ conduce a $m = \frac{2021}{3}$, che non è un numero intero. I furfanti sono quindi un numero pari, diciamo $2m$: i cavalieri saranno tutte e sole le persone in posizioni dispari minori o uguali di $2m$, più la persona in posizione $2m$, quindi in totale $m+1$. Dunque $3m+1 = 2023$ e perciò i furfanti sono $2m = 1348$. Si verifica che la configurazione funziona.

15. Sia $\alpha = \widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ (poiché il trapezio è isoscele, i due angoli sono uguali); la condizione $AB = AP$ equivale al fatto che si abbia $\widehat{BPA} = \widehat{PBA} = \alpha$. A sua volta, poiché $\widehat{PAB} = \alpha/2$ (AP è bisettrice dell'angolo in A), questo equivale a $2\alpha + \alpha/2 = 180°$ (somma degli angoli interni nel triangolo BAP), cioè ad $\alpha = 72°$.

Poniamo $\widehat{CDB} = \widehat{BDA} = \theta$; poiché gli angoli $\widehat{CDB}$ e $\widehat{DBA}$ sono alterni interni rispetto alle parallele DC, AB tagliate dalla trasversale BD, abbiamo anche $\widehat{DBA} = \theta$; dunque, dato che il trapezio è isoscele, abbiamo in effetti anche $\widehat{BCA} = \widehat{CAB} = \theta$, e inoltre $2\theta + \alpha = 180°$ (angoli interni del triangolo ABC), ovvero $\theta = 90° - \alpha/2$. Di conseguenza, $\widehat{CAP} = \widehat{CAB} - \widehat{PAB} = \theta - \alpha/2 = 90° - \alpha$, mentre $\widehat{DAC} = \alpha - \widehat{CAB} = \alpha - \theta = \frac{3}{2}\alpha - 90°$.

Ora, si ha AC bisettrice di $\widehat{DAP}$ se e solo se $\widehat{DAC} = \widehat{CAP}$, se e solo se $\frac{3}{2}\alpha - 90° = 90° - \alpha$, cioè $\alpha = 72°$, che a sua volta è equivalente alla condizione $AB = AP$ come argomentato in precedenza.

16. (a) Supponiamo per assurdo che esista un intero positivo doppiamente reversibile di tipo 2. Esso si scrive come xx in una certa base b e come yy nella base $b+1$. Per definizione di rappresentazione di un numero in una base, si deve avere

$$x \cdot b^1 + x \cdot b^0 = y \cdot (b+1)^1 + y \cdot (b+1)^0,$$

dove $0 < x < b$ e $0 < y < b+1$. Riscrivendo, abbiamo

$$x(b+1) = y(b+2),$$

da cui vediamo che $b+2$ divide $x(b+1)$. Dal momento che $b+2$ e $b+1$, essendo interi consecutivi, non hanno fattori primi in comune, $b+2$ deve dividere anche x, ma questo contraddice la disuguaglianza $0 < x < b$.

(b) Cerchiamo un numero doppiamente reversibile di tipo 3 scrivendolo come xyx in base b e come uvu in base $b+1$. Come sopra, questo ci porta all'uguaglianza

$$x \cdot b^2 + y \cdot b + x \cdot b^0 = u \cdot (b+1)^2 + v \cdot (b+1) + u \cdot (b+1)^0,$$

che riscriviamo come

$$x \cdot b^2 + y \cdot b + x \cdot b^0 = u \cdot b^2 + (2u+v) \cdot b + (2u+v) \cdot b^0.$$

Pensando ora all'unicità della rappresentazione in base b, osserviamo che *se non ci fossero riporti* nel calcolo di $2u+v$ in base b, ovvero se valesse $2u+v < b$, allora le cifre del nostro numero in base b sarebbero sia x, y, x, sia $u, 2u+v, 2u+v$, ma questo forzerebbe $x = u = 2u+v$, da cui $u = v = 0$, che non corrisponde ad un intero positivo. Concludiamo quindi che ci *deve* essere un riporto affinché l'uguaglianza qui sopra sia possibile, e proviamo perciò a chiederci cosa succede se questo riporto è il minimo possibile, ovvero se $2u+v$ è maggiore di b ma minore di $2b$. In realtà, per una ragione che vedremo fra un attimo, è comodo interessarsi al caso in cui $2u+v \leq 2b-2$. Infatti, in tal caso è facile determinare esattamente i riporti e riscrivere $u \cdot b^2 + (2u+v) \cdot b + (2u+v) \cdot b^0$ nella forma

$$(u+1) \cdot b^2 + (2u+v+1-b) \cdot b + (2u+v-b) \cdot b^0,$$

dove $2u+v+1-b$ proviene dall'aver aggiunto il riporto di 1 dalla cifra delle unità e aver poi sottratto la quantità b, che viene riportata alla cifra corrispondente a b^2. La condizione $2u+v \leq 2b-2$ garantisce che $2u+v+1-b \leq b-1$, cioè che non vi siano altri riporti. Siamo allora in cerca di un numero che in base b si scrive sia con le cifre x, y, x, sia con le cifre $u+1, 2u+v+1-b, 2u+v-b$. Imponendo l'uguaglianza di tali cifre otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = u+1 \\ y = 2u+v+1-b \\ x = 2u+v-b. \end{cases}$$

La differenza della seconda e terza equazione fornisce $y - x = 1$, cioè $y = x+1$. Il confronto fra la prima e terza equazione fornisce invece $u+1 = 2u+v-b \Rightarrow b = u+v-1$. Possiamo allora scegliere (un po' arbitrariamente) $u = 2, v = b-1, x = u+1 = 3, y = x+1 = 4$, il che ci porta a considerare il numero $343_b = 2(b-1)2_{b+1}$ (dove la scrittura a destra dell'uguale indica il numero che, in base $b+1$, si scrive con le cifre $2, b-1, 2$). Che tale uguaglianza sia soddisfatta segue dalle considerazioni che ci hanno portato a scriverla, ma è anche facile verificarla direttamente:

$$343_b = 3b^2 + 4b + 3,$$

$$\begin{aligned} 2(b-1)2_{b+1} &= 2(b+1)^2 + (b-1)(b+1) + 2 = 2(b^2+2b+1) + b^2 - 1 + 2 \\ &= 2b^2 + 4b + 2 + b^2 - 1 + 2 = 3b^2 + 4b + 3. \end{aligned}$$

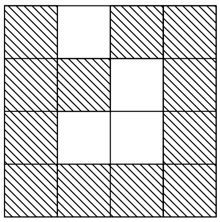
Abbiamo così costruito infiniti numeri doppiamente reversibili di tipo 3: sono tutti quelli che, in una qualsiasi base $b \geq 2$, si scrivono come 343.

Osservazione. Si noti che tutte le considerazioni nella prima parte della soluzione motivano la scelta di considerare numeri che in base b si scrivono come 343. Tuttavia, a rigor di termini, per risolvere il problema non è necessario *spiegare* come si sia arrivati a considerare il numero 343_b, ma soltanto *mostrare* che esso è effettivamente doppiamente reversibile di tipo 3 per ogni $b \geq 2$.

17. (a) Innanzitutto osserviamo che un quadrato 2×2 all'interno della tabella può contenere al più 3 caselle appartenenti all'insieme S: infatti, se per assurdo ci fosse un quadrato 2×2 con tutte e 4 le caselle appartenenti all'insieme S, allora si potrebbe trovare un percorso, tutto contenuto all'interno del quadrato, che contraddice la seconda condizione data dal problema (per esempio, partendo dalla casella in basso a sinistra del quadrato e andando una volta a destra, una volta su, una volta a sinistra e una volta giù si tornerebbe nella casella di partenza senza mai attraversare due volte lo stesso lato).

Si divida l'intera tabella in n^2 quadrati, ciascuno di dimensioni 2×2. Per quanto detto prima, ciascuno di questi quadrati 2×2 può contenere al più 3 caselle appartenenti all'insieme S e quindi l'insieme S può contenere al più $3 \cdot n^2$ caselle.

(b) Un esempio di insieme labirintico di 12 caselle in una tabella 4×4 è dato dall'insieme delle caselle ombreggiate nella seguente figura:



(c) Dimostriamo per induzione sul numero di caselle che se un insieme labirintico S ha k caselle, allora ci sono $2k+2$ lati adiacenti a esattamente una casella di S, cioè

$$\text{perimetro}(S) = 2k + 2.$$

Se $k = 1$, allora S $= 4 = 2 \cdot 1 + 2$, come volevamo.

Assumiamo ora che l'affermazione valga per qualunque insieme labirintico con $k-1$ caselle, con $k \geq 2$, e consideriamo S un insieme labirintico con k caselle.

Tutte le caselle di S sono adiacenti ad almeno un'altra casella di S: infatti, data una casella x di S, esiste almeno un'altra casella x' di S distinta da x (S per ipotesi ha almeno due caselle); per la prima condizione sugli insiemi labirintici, è possibile spostarsi da x a x' muovendosi solo da caselle di S a caselle di S adiacenti. In particolare, esiste almeno una casella adiacente a x.

Esiste almeno una casella di S adiacente a una sola altra casella di S: assumiamo per assurdo che non esistano caselle di S con questa proprietà, e cioè che tutte le caselle di S siano adiacenti ad almeno altre 2 caselle di S; siano x_0 e x_1 due caselle adiacenti tra loro e si costruisca per ricorsione la successione di caselle $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in S, tale per cui, per ogni $i \geq 1$, le caselle x_i e x_{i+1} siano adiacenti e x_{i+1} sia distinta da x_{i-1} (poiché ogni casella di S è adiacente ad almeno altre due caselle di S, dati x_{i-1} e x_i, è sempre possibile scegliere un x_{i+1} che rispetti le condizioni volute). Sia t il primo tempo in cui la successione ripassa su una casella già visitata, cioè tale che $x_s = x_t$ per qualche $s < t$; ciò porta a un assurdo, in quanto la sequenza $x_s, \dots, x_t$ contraddice la seconda ipotesi sugli insiemi labirintici. Quindi deve esistere almeno una casella di S che sia adiacente ad una sola casella di S; chiamiamo c tale casella.

Adesso è immediato verificare che l'insieme S', formato da tutte le caselle S meno la casella c, è ancora labirintico. Poiché S è ottenuto da S' aggiungendo la casella c, l'insieme dei lati adiacenti a esattamente una casella di S è dato dall'insieme dei lati adiacenti a esattamente una caselle di S', meno il lato tra c e S' e aggiunti gli altri tre lati di c, da cui

$$\text{perimetro}(S) = \text{perimetro}(S') + 2 = (2(k-1)+2)+2 = 2k+2,$$

dove la seconda uguaglianza vale per l'ipotesi induttiva.

Seconda soluzione: Vogliamo dimostrare che l'insieme S può essere costruito ricorsivamente attaccando una casella alla volta, in modo tale che ogni casella attaccata sia adiacente ad una ed una sola delle caselle precedentemente attaccate; inoltre, vogliamo dimostrare che ogni volta che una casella viene attaccata, il perimetro aumenta di 2 rispetto al passo precedente.

Sia x_1 una casella arbitraria di S e sia S_1 l'insieme formato dalla casella x_1, il cui perimetro vale 4. Se $k = 1$, allora ho finito. Se $k > 1$, allora l'insieme S contiene almeno un'altra casella c. Grazie alla prima condizione degli insiemi labirintici, si sa che è possibile raggiungere c partendo da x_0 e spostandosi solo attraverso caselle adiacenti; in particolare, esiste almeno una casella x_2 adiacente ad x_1; chiamo S_2 l'insieme costituito dalle caselle x_1 e x_2 e osservo che il perimetro di S_2 è $6 = 4 + 2$.

Supponiamo ora di aver costruito l'insieme S_j con le regole dette sopra e chiamiamo $x_2, \dots, x_j$ le caselle che sono state attaccate per ottenere S_j; se $j = k$, allora $S = S_k$ e ho finito. Se $j > k$, allora esiste almeno una casella c' in S che non sta in S_j e, per la prima condizione degli insiemi labirintici, esiste un percorso di caselle adiacenti che parte da x_0 e arriva a c'; sia x_{j+1} la prima casella attraversata da questo percorso che non sta in S_j: in questo modo x_{j+1} è adiacente alla casella che la precede nel percorso, che è appunto una casella di S_j. Ora vogliamo dimostrare che x_{j+1} è adiacente a un'unica casella di S_j: supponiamo per assurdo che x_r e x_s siano due caselle di S_j adiacenti a x_{j+1}; allora esiste almeno un percorso completamente contenuto in S_j che va da x_s a x_t che attraversa solo caselle adiacenti (infatti, per costruzione di S_j, esistono due percorsi, Σ_1 che va da x_1 a x_r e Σ_2 che va da x_1 a x_s, che attraversano solo caselle adiacenti; percorrendo Σ_1 all'indietro e poi Σ_2, si ottiene il percorso voluto). Sia Σ il percorso minimale da x_r a x_s (cioè che attraversa il minor numero di caselle possibili) che attraversi solo caselle adiacenti e che sia completamente contenuto in S_j; per minimalità, questo percorso non può mai attraversare due volte lo stesso lato (altrimenti si potrebbe accorciare il percorso). Adesso, partendo da x_{j+1}, andando in x_r, percorrendo Σ fino ad arrivare ad x_s e infine tornando in x_{j+1}, si trova un percorso completamente contenuto in S che attraversa solo caselle adiacenti e che non ripassa mai sullo stesso lato. Abbiamo quindi trovato una contraddizione alla seconda ipotesi del problema e abbiamo quindi dimostrato che x_{j+1} può essere adiacente ad al più una casella di S_j.

Sia S_{j+1} l'insieme ottenuto aggiungendo a S_j la casella x_{j+1}. Si osservi che l'insieme dei lati adiacenti ad una sola casella di S_{j+1} è dato dall'insieme dei lati adiacenti ad una sola casella di S_j, a cui va tolto il lato tra x_{j+1} e S_j e aggiunti gli altri 3 lati di x_{j+1}. Da qui segue che ogni volta che attacchiamo una casella, aggiungiamo esattamente 2 lati al perimetro.

Poichè il perimetro di S_1 è 4 e a questo vengono attaccate esattamente $k-1$ caselle per ottenere $S_k = S$, si ha

$$\text{perimetro}(S) = 4 + 2 \cdot (k-1) = 2k+2.$$

(d) Supponiamo che esista un insieme labirintico S di 300 caselle in una tabella 20×20. Il perimetro dell'intera tabella è 80, mentre per il punto precedente sappiamo che il perimetro di S è $2 \cdot 300 + 2 = 602$.

Sia T l'insieme formato dalle 100 caselle che non appartengono a S; si osservi che il perimetro di T è al più $4 \cdot 100 = 400$ (cioè ogni casella di T contribuisce di al più 4 lati al perimetro), mentre il perimetro dell'intera tabella è 80.

Poiché per definizione un lato contribuisce al perimetro di S solo se questo è adiacente ad una sola casella in S, si ha che questo lato dovrà o appartenere al bordo della tabella, oppure essere adiacente a una casella di T, da cui

$$602 = \text{perimetro}(S) \leq \text{perimetro}(T) + \text{perimetro}(\text{Tabella}) \leq 400 + 80 = 480$$

che dà un assurdo.

Seconda soluzione: Grazie al punto precedente, sappiamo che l'insieme S ha un perimetro di 602 caselle; inoltre, sempre dalla dimostrazione del punto precedente, si vede che ogni volta che una casella viene attaccata, esattamente un lato viene utilizzato per attaccare la casella all'insieme. Quindi il numero di lati che sono adiacenti a due caselle di S è esattamente $300 - 1 = 299$ (un lato per ogni casella attaccata). Quindi l'esistenza di S richiede almeno $602 + 299 = 901$ lati. Poiché la tabella possiede in totale 840 lati, l'insieme S non può esistere.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Si assegnino **6 punti** per una dimostrazione completa del fatto che $AP = AB$ equivale a $\widehat{DAB} = 72°$. Di questi, **2 punti** si assegnino per il fatto di esprimere la condizione in termini degli angoli $\widehat{ABP}$ e $\widehat{APB}$, **2 punti** ulteriori per chi consideri la somma degli angoli nel triangolo ABP (per un totale di **4 punti** su 6 nel caso non venga poi dedotta una condizione più esplicita su $\widehat{DAB}$).

- Si assegnino **9 punti** per una dimostrazione completa del fatto che AC bisettrice di $\widehat{DAP}$ equivale a $\widehat{DAB} = 72°$. Di questi, **3 punti** si assegnino a chi osservi la congruenza di angoli alterni interni rispetto alle parallele AB, DC (con trasversale BD come nella soluzione ufficiale, o eventualmente AC); **3 punti** ulteriori si assegnino a chi sfrutti correttamente il fatto che il trapezio sia isoscele per stabilire la congruenza di angoli quali $\widehat{CAB}$ e $\widehat{DBA}$, o $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ACB}$, o $\widehat{DCA}$ e $\widehat{ACB}$; infine, si assegnino **2 punti** ulteriori a chi sfrutti le uguaglianze precedenti e il calcolo della somma degli angoli interni di un triangolo, senza però dedurre una condizione esplicita su $\widehat{DAB}$ (o altro angolo).

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **7 punti**. Si assegnino **2 punti** per chi esprima esplicitamente il significato della rappresentazione in base (ovvero espliciti il fatto che $xx_b = x \cdot b + x$) e **1 punto** ulteriore a chi scriva un'equazione equivalente a $x(b+1) = y(b+2)$. Si assegnino poi **2 punti** per l'osservazione che il massimo comun divisore fra $b+1$ e $b+2$ è pari ad 1, e **2 punti** per chi concluda.

- Il punto (b) vale **8 punti**. Per progressi parziali lungo le linee della soluzione presentata in queste pagine, si assegni **un punto** a chi osservi esplicitamente che nell'espressione $u \cdot b^2 + (2u + v) \cdot b + (2u + v) \cdot b^0$ ci possono essere riporti, e ulteriori **due punti** per un'espressione analoga a $(u+1) \cdot b^2 + (2u + v + 1 - b) \cdot b + (2u + v - b) \cdot b^0$. Si attribuiscano ulteriori **due punti** a chi, imponendo l'uguaglianza delle cifre in base b, ottenga un sistema di equazioni analogo a

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = 2u + v + 1 - b \\ x = 2u + v - b. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la parte (b),

- Si attribuiscano **5 punti** a chi esibisca correttamente un insieme infinito D di numeri doppiamente reversibili di tipo 3, senza però dimostrare che i numeri di D abbiano effettivamente la proprietà richiesta.

- Non si sottraggano punti (né in caso di soluzioni complete, né nel caso dei 5 punti appena descritti) a chi esibisca correttamente un insieme di numeri doppiamente reversibili senza spiegare come questo sia stato trovato.

- In assenza di altri progressi significativi verso la soluzione, si assegni **1 punto** a chi esibisca almeno un esempio corretto di numero doppiamente reversibile di tipo 3.

- Si assegnino infine **2 punti** a chi esplicita con un'equazione il significato della rappresentazione in base di un numero intero, purché gli analoghi due punti non siano già stati assegnati per la medesima ragione nella parte (a).

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **3 punti**. Di questi, si assegnino **1 punto** a chi dimostra che non possono esistere quadrati 2×2 completamente contenuti in S, **1 punto** a chi suddivide la tabella in quadrati 2×2 e **1 punto** a chi conclude.

- Il punto (b) vale **2 punti**; si assegnino questi punti a chi disegna o descrive un insieme labirintico in una tabella 4×4, anche senza giustificazione.

- Il punto (c) vale **5 punti**. Nello specifico, si assegni **1 punto** a chi afferma che il perimetro di un insieme labirintico di k caselle vale $2k+2$ (anche senza giustificazione), **1 punto** a chi considera il caso $k = 1$ e **3 punti** a chi dimostra il caso generale.

  Per dimostrazioni parziali del caso generale si assegnino **1 punto** a chi osserva che in un insieme labirintico S con almeno 2 caselle, tutte le caselle sono adiacenti ad almeno un'altra casella di S, **1 punto** a chi dimostra che esiste almeno una casella di S adiacente a esattamente un'altra casella dell'insieme e **1 punto** a chi conclude.

  A chi segue invece il secondo approccio proposto, i 3 punti del caso generale sono divisi in: **1 punto** a chi mostra che se l'insieme costruito al passo j non ha ancora k caselle, allora esiste una casella di S che è adiacente a questo insieme; **1 punto** a chi dimostra che una casella di S, che al passo j non è ancora stata attaccata, può essere adiacente ad al più una casella di quelle già attaccate; **1 punto** a chi conclude.

- Il punto (d) vale **5 punti**. Di questi, **1 punto** a chi calcola il perimetro dell'intera tabella, **2 punti** a chi dimostra che il complementare dell'insieme S ha perimetro minore o uguale di 400 e **2 punti** a chi conclude.

  Per chi segue la seconda soluzione proposta, si assegnino **2 punti** per chi calcola il numero di lati adiacenti a due caselle di S (o che dimostra che questo numero è maggiore di 238), **1 punto** a chi calcola il numero totale di lati della tabella e **2 punti** per concludere.

Per quanto riguarda i punti (c) e (d): il massimo dei punti da assegnare a ciascuno dei due è di 5. I punti dei due approcci proposti non sono cumulabili tra loro. A chi non conclude, ma ottiene punti per entrambe le soluzioni proposte, si assegni il punteggio maggiore tra i due che si otterrebbero considerando i singoli approcci.