# Prima Gara di Coordinatori e Responsabili

## Cesenatico, 2023.05.05

**Problema 1.** Trovare il più piccolo intero positivo con 12 divisori pari positivi e 6 divisori dispari positivi.

**Soluzione.** 180

**Problema 2.** Qual è la probabilità di ottenere almeno due croci lanciando 10 monete? (Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

**Soluzione.** 2037

**Problema 3.** Un intero è chiamato *serpentoso* se la sua rappresentazione decimale $a_1\, a_2\, a_3 ... a_k$ soddisfa $a_i < a_{i+1}$ se $i$ è dispari e $a_i > a_{i+1}$ se $i$ è pari. Quanti sono gli interi serpentosi fra 1000 e 9999 che hanno 4 cifre distinte?

**Soluzione.** 882

**Problema 4.** In un triangolo $ABC$, gli angoli in $A$ e in $B$ misurano 60 e 45 gradi rispettivamente. La bisettrice dell'angolo in $A$ interseca $BC$ in $T$ e si sa che $AT = 24$. L'area del triangolo $ABC$ può essere scritta nella forma $a + b\sqrt{c}$, dove $a$, $b$ e $c$ sono interi positivi e $c$ non è divisibile per il quadrato di alcun primo. Trovare $a + b + c$.

**Soluzione.** 291

**Problema 5.** Sia $N$ il numero di zeri consecutivi con cui termina (in fondo a destra nella scrittura decimale) il prodotto $1!\,2!\,3! \cdots 99!\,100!$. Trovare il resto della divisione di $N$ per 1000.

**Soluzione.** 124

**Problema 6.** I numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 sono disposti in modo casuale sulle facce di un ottaedro regolare, in modo che ogni faccia contenga un numero diverso. La probabilità che non ci siano numeri consecutivi scritti su facce adiacenti (che condividono uno spigolo) è $^m/_n$ dove $m$ e $n$ sono interi positivi primi fra loro. I numeri 1 e 8 sono considerati consecutivi. Trovare $m + n$.

**Soluzione.** 85

**Problema 7.** Il polinomio $P(x)$ è di terzo grado. Qual è il più grande valore di $k$ per cui i polinomi $Q_1(x) = x^2 + (k - 29)\,x - k$ e $Q_2(x) = 2\,x^2 + (2\,k - 43)\,x + k$ dividono entrambi $P(x)$?

**Soluzione.** 30

**Problema 8.** Un insieme $\mathcal{S}$ contenente interi positivi diversi fra loro ha la seguente proprietà: per ogni intero $x$ in $\mathcal{S}$, la media aritmetica degli elementi dell'insieme ottenuto rimuovendo $x$ da $\mathcal{S}$ è un intero. Sapendo che 1 appartiene ad $\mathcal{S}$ e che 2022 è il più grande elemento di $\mathcal{S}$, quanti elementi al massimo può contenere $\mathcal{S}$?

**Soluzione.** 44