XXXIX Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico 2023

5 maggio 2023

Criteri di valutazione e schemi di correzione

Introduzione

Questo documento contiene gli schemi di correzione usati nella Finale Nazionale 2023 delle Olimpiadi di Matematica (amichevolmente, Cesenatico 2023).

Per ogni esercizio vengono indicati vari passaggi intermedi e i punteggi ad essi attribuiti (in modo tra loro additivo, se non diversamente indicato); inoltre, sono riportati i più comuni errori e le loro penalizzazioni, casi di osservazioni che non valevano punti. Infine, si danno anche esempi di risposte incomplete o incorrette e il loro punteggio.

Lo scopo di queste pagine è triplice:

1. fornire a chi si prepara alle gare delle olimpiadi un'idea di cosa viene valutato e cosa no e di come viene corretta una prova;
2. fornire ai docenti che preparano i propri studenti una linea guida per il tipo di valutazione che viene utilizzata nelle finali nazionali, sia nell'ottica della preparazione degli studenti, sia nell'ottica della correzione dei loro elaborati in fasi precedenti;
3. fornire a chi ha partecipato a questa edizione della Finale Nazionale un modo di interpretare il punteggio preso in ogni singolo esercizio.

Indice

Problema 1

> Siano a e b interi positivi tali che
> $$54^a = a^b.$$
> Dimostrare che a è una potenza di 54, cioè esiste un intero positivo c tale che $a = 54^c$.

Soluzione 1

Dato che il LHS contiene solo fattori 2 e 3, anche il RHS deve rispettare la stessa proprietà, pertanto gli unici primi che possono dividere a sono 2 e 3, e quindi a è della forma $2^x \cdot 3^y$. Sostituendo nell'enunciato del problema, si ha $2^a \cdot 3^{3a} = 2^{bx} \cdot 3^{by}$, da cui, per l'unicità della fattorizzazione in primi, $a = bx$ e $3a = by$. Segue che $y = 3x$, per cui sostituendo si ha $a = 2^x \cdot 3^y = 2^x \cdot 3^{3x} = (2 \cdot 3^3)^x = 54^x$, come volevasi dimostrare.

Punteggi

(2 pt) Osservare che a è della forma $2^x \cdot 3^y$ per qualche $x, y \in \mathbb{N}$.

(2 pt) Impostare l'equazione $2^a \cdot 3^{3a} = 2^{bx} \cdot 3^{by}$.

(1 pt) Dedurre che $a = bx$ e $3a = by$.

(1 pt) Dedurre che $y = 3x$.

(1 pt) Concludere che $a = (2 \cdot 3^3)^x = 54^x$.

Soluzione 2

Sia $a = 2^x \cdot d$ con d dispari. Sostituendo nell'enunciato del problema, si ha $2^a \cdot 3^{3a} = 2^{bx} \cdot d^b$, da cui, per l'unicità della fattorizzazione in primi, $a = bx$. Segue che $a/b = x$ è intero, per cui, prendendo la radice b-esima, otteniamo $a = 54^{a/b}$, che è una potenza di 54, come volevasi dimostrare.

Punteggi

(2 pt) Scrivere a come $2^x \cdot d$ per qualche d dispari.

(2 pt) Impostare l'equazione $2^a \cdot 3^{3a} = 2^{bx} \cdot d^b$.

(1 pt) Dedurre che $a = bx$.

(1 pt) Dedurre che a/b è intero.

(1 pt) Concludere che $a = 54^x$.

Soluzione 3

Elevando entrambi i membri a $1/b$, otteniamo $a = 54^{a/b}$. Siano m, n coprimi tali che $a/b = m/n$. Allora $a = 54^{m/n} = (54^m)^{1/n}$; è quindi sufficiente dimostrare che $n = 1$, dato che in quel caso $a = 54^m$. Dato che in 54 compare un solo fattore 2, 54 non è una potenza n-esima per $n \neq 1$, e dato che $\gcd(m, n) = 1$, neanche 54^m è una potenza n-esima per $n \nmid m$. Ma $a = (54^m)^{1/n}$, quindi $(54^m)^{1/n}$ è intero, quindi 54^m è una potenza n-esima, quindi $n \mid m$. Ma siccome $\gcd(m, n) = 1$, necessariamente $n = 1$, quindi $a = 54^m$, come volevasi dimostrare.

Punteggi

(0 pt) Scrivere $a = 54^{a/b}$.

(0 pt) Scrivere $a/b = m/n$ con $\gcd(m, n) = 1$.

(1 pt) Scrivere $a = (54^m)^{1/n}$.

(1 pt) Osservare che $n = 1$ implica la tesi.

(2 pt) Mostrare che 54^m non è una potenza n-esima per $n \nmid m$.

(3 pt) Concludere che $n = 1$.

Nota: Ci sono state molte soluzioni simili alla seguente: *Elevando entrambi i membri a* $1/b$*, otteniamo* $a = 54^{a/b}$*. Ma* $54^{a/b}$ *è intero se e solo se* a/b *è intero (perché* 54 *non è una potenza perfetta), ed in questo caso* a *è una potenza di* 54*, come volevasi dimostrare.*

Queste soluzioni hanno ottenuto 4 punti in presenza della frase "54 non è una potenza perfetta", e 2 punti in sua assenza. Il motivo per cui queste non sono soluzioni complete è che non è sufficiente che 54 non sia una potenza perfetta, ma occorre anche mostrare che 54^a è una potenza b-esima se e solo se $b \mid a$.

Soluzione 4

Prendendo il logaritmo in base 54, otteniamo $a = b \cdot \log_{54}(a)$. Enunciamo il seguente lemma: "Siano x, y interi, con x non potenza perfetta. Allora $\log_x(y)$ è razionale se e solo se è intero". Dall'equazione precedente, otteniamo che $\log_{54}(a) = a/b$ che è razionale. Dato che 54 non è una potenza perfetta, e a è intero, allora per il lemma $\log_{54}(a) = a/b$ è intero, e per definizione $a = 54^{a/b}$ è una potenza perfetta perché a/b è intero.

Punteggi

(0 pt) Scrivere $a = b \cdot \log_{54}(a)$.

(1 pt) Enunciare che se $\log_{54}(a)$ è razionale, allora è intero.

(3 pt) Giustificare l'osservazione precedente con il fatto che 54 non è una potenza perfetta.

(3 pt) Enunciare correttamente il lemma generale e concludere.

Nota: Ci sono state molte soluzioni simili alla seguente: *Prendendo il logaritmo in base* 54*, otteniamo* $a = b \cdot \log_{54}(a)$*. Segue che* $\log_{54}(a) = a/b$ *che è razionale, e pertanto (dato che* 54 *non è una potenza pefetta) è intero. Segue che* $a = 54^{\log_{54}(a)}$ *è una potenza di* 54*.*

Queste soluzioni hanno ottenuto 4 punti in presenza della frase "54 non è una potenza perfetta", e 2 punti in sua assenza. Il motivo per cui queste non sono soluzioni complete è che l'affermazione "$\log_{54}(a) = a/b$ che è razionale, e pertanto è intero" non è giustificata (ed è falsa senza l'ipotesi sulle potenze perfette), e il modo in cui si dimostra è sostanzialmente equivalente a dimostrare direttamente l'enunciato originale.

Soluzione 5

Il LHS è $54^a = 2^a \cdot 3^{3a}$, per cui gli esponenti di 2 e 3 compaiono con rapporto $1 : 3$ (che sono coprimi); essendo uguali, la stessa cosa deve valere per il RHS; per lo stesso motivo, il RHS non può avere altri fattori primi oltre 2 e 3. Ma l'elevamento a potenza non cambia il rapporto fra gli esponenti dei fattori primi, pertanto anche in a il rapporto fra gli esponenti di 2 e 3 deve essere $1 : 3$. Segue che $a = 2^x \cdot 3^{3x}$ per qualche x, da cui $a = 54^x$.

Punteggi

(2 pt) Osservare che a ammette solo 2 e 3 come fattori primi.

(2 pt) Osservare che il rapporto fra gli esponenti del LHS è $1:3$.

(2 pt) Osservare che il rapporto fra gli esponenti è invariante per elevamento a potenza.

(1 pt) Concludere che $a = 2^x \cdot 3^{3x} = 54^x$.

Nota: Sono stati tolti 1 o 2 punti a chi giustificava parzialmente, o non giustificava affatto, che il rapporto fra gli esponenti non cambia per elevamento a potenza. Similmente, è stato tolto 1 punto a chi affermava che gli esponenti di 2 e 3 in a dovessero essere multipli di quelli di 54: a priori, sono solo proporzionali, e risultano essere multipli a posteriori perché $\gcd(1,3) = 1$. Per esempio, 36 e 216 hanno gli esponenti con lo stesso rapporto $1:1$, ma non essendo coprimi, non sono necessariamente uno potenza dell'altro; per questo motivo, tale passaggio andava giustificato.

Varie

Ci sono state diverse affermazioni del tipo "Dato che $54 \mid a^b$, allora $54 \mid a$": questo è falso, perché per esempio con $a = 6$ e $b = 3$, si ha che $54 \mid 6^3 = 216$, ma sicuramente $54 \nmid 6$.

Problema 2

Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo

- per ogni $i = 1, \dots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i,
- cancella tutti i numeri scritti,
- scrive sulla lavagna i numeri a_1, a_2, $\dots$, a_n.

Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono 0, 7, 2, 6, 2, dopo la prima mossa saranno 1, 3, 3, 3, 3, dopo la seconda mossa saranno 1, 1, 5, 5, 5, e così via.

(a) Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.

(b) Determinare, in funzione di n, il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k-esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.

Sia M_n il minimo numero di mosse necessarie perché venga raggiunta la configurazione stabile $1\ 2\ 3 \dots n$.

- Sono stati assegnati **4 punti** per una dimostrazione completa del fatto che $M_n \leq 2n$, ovvero che dopo $2n$ mosse i numeri scritti alla lavagna sono certamente $1\ 2\ 3 \dots n$.
- Altri **3 punti** sono stati assegnati per la dimostrazione che $M_n \geq 2n$ tramite un esempio per ciascun valore di n in cui $2n$ mosse siano effettivamente necessarie per raggiungere la configurazione stabile $1\ 2\ 3 \dots n$, corredato da una dimostrazione completa di questo fatto (un esempio appropriato potrebbe essere la sequenza iniziale $n+1 \dots n+1$ di n copie del numero $n+1$).

In verità, il minimo k richiesto al punto (b) dell'esercizio è pari a $M_n + 1$ e quindi a $2n+1$; tuttavia, il numero calcolato dalla maggior parte dei concorrenti è $M_n = 2n$. Non sono stati sottratti punti per eventuali piccoli fraintendimenti di questo tipo, purché la soluzione proposta sia coerente nella scelta della quantità da calcolare.

La situazione più comune è quella di soluzioni parziali che contengano solo la dimostrazione che $M_n \leq 2n$ e non lo svolgimento di un esempio. Tali soluzioni ottengono un massimo di **4 punti**; potrebbero ottenere **3 punti** nel caso in cui si dimostri il punto (a) del problema senza calcolare il numero massimo di mosse impiegate (quindi senza ottenere la stima di $2n$), o nel caso in cui la dimostrazione non sia sufficientemente motivata.

Soluzioni non strutturate correttamente, nelle quali è possibile rintracciare solo qualche osservazione utile, ottengono un massimo di **2 punti** in totale per tali osservazioni (quali ad esempio "*dopo la prima mossa i numeri scritti saranno tutti al massimo n*" o "*dopo la seconda mossa, e da allora in poi, verrà sempre scritto il numero n*" o "*la configurazione $1\ 2\ 3 \dots n$ rimane invariata*").

Soluzioni che considerino solo il numero di mosse da effettuare per stabilizzare un esempio, anche se generico (ad esempio la configurazione iniziale $n+1 \dots n+1$) e sostengano che tale esempio risulti nel numero di mosse più grande possibile, senza una dimostrazione completa di questo fatto, ottengono **3 punti**.

Sono infine possibili soluzioni parziali che ottengano **5** oppure **6 punti**. Per queste ultime, si tratta solitamente di una penalizzazione per piccole lacune nella dimostrazione o (spesso) errori minori nella costruzione dell'esempio. Un punteggio di 5 punti è in genere indice di una dimostrazione completa del fatto che $M_n \leq 2n$, seguita da una costruzione non sufficientemente esplicita o generale dell'esempio che mostri $M_n \geq 2n$. Si noti che esempi svolti esplicitamente per un valore specifico di n (come la sequenza di mosse che stabilizza la lista di numeri fornita all'interno del testo dell'esercizio) non costituiscono una dimostrazione del fatto che $M_n \geq 2n$ per qualunque n e non danno diritto a punti.

Problema 3

Per ogni intero positivo n, indichiamo con $s(n)$ la somma delle cifre di n (nell'usuale rappresentazione in base 10). Così, per esempio, $s(8) = 8$, $s(2023) = 7$, $s(573) = 15$.

(a) Determinare se esistono due interi positivi distinti a e b tali che

$$2023 \cdot a + s(a) = 2023 \cdot b + s(b).$$

(b) Determinare se esistono due interi positivi distinti a e b tali che

$$a + 2023 \cdot s(a) = b + 2023 \cdot s(b).$$

Schema di correzione

1. La parte (a) vale **3 punti**. Di questi, **2 punti** sono assegnati per l'identificazione di una soluzione corretta, mentre **un punto** è assegnato per la verifica che la soluzione indicata soddisfi effettivamente l'equazione del testo.

   Commento. Il requisito di una verifica nasce dal fatto che – trattandosi di numeri ad almeno 2023 cifre – non si può presumere che il solutore abbia semplicemente svolto un'addizione in colonna per controllare la correttezza delle proprie affermazioni. Si rende quindi necessaria una qualche giustificazione addizionale, che può prendere diverse forme: una spiegazione di come il risultato sia stato trovato; l'indicazione dei valori di $s(a) - s(b)$ e $b - a$ insieme alla riscrittura $s(a) - s(b) = 2023(b - a)$ dell'equazione del testo; il calcolo diretto di $2023a + s(a), 2023b + s(b)$; considerazioni generali su certe classi di numeri che includono quelli usati come esempio; eccetera.

2. La parte (b) vale **4 punti**. In caso di coppie (a, b) come quella indicata nella soluzione ufficiale, costituita da numeri di poche cifre, non è richiesta una verifica esplicita della correttezza della soluzione, dato che si presuppone che tale verifica possa essere stata svolta tramite una semplice addizione.

3. Punteggi parziali sono assegnati nel modo seguente:

   (i) *In caso né il punto (a) né il punto (b) siano stati risolti completamente*, **1 punto** viene assegnato per l'osservazione che ogni soluzione deve rispettare $a \equiv b \pmod 9$ (ovvero 9 divide $a - b$). Tale punto viene attribuito sia che l'osservazione venga fatta nell'ambito della parte (a), sia che venga fatta nella parte (b), sia che venga fatta in entrambe (nel qual caso viene comunque attribuito un unico punto in totale).

   (ii) Nella parte (a), **1 punto** (cumulabile con il precedente) viene attribuito per un'osservazione sufficientemente generale del tipo seguente: *se ad un numero a che termina con molte cifre 9 viene sommata un'unica cifra k, allora $s(a + k)$ si può esprimere in termini della somma delle cifre di a, del numero di cifre 9 finali, e della cifra k che viene aggiunta.* Tale punto **non** viene assegnato a chi fissi in partenza il numero di cifre 9, né a chi faccia questa osservazione solo con la cifra $k = 1$ (in quanto tale scelta non conduce ad una soluzione).

   (iii) Nella parte (b), **1 punto** viene assegnato per l'osservazione che ogni soluzione deve rispettare la proprietà che $a-b$ sia multiplo di 2023. Tale punto **non è cumulativo** con quello assegnato per l'osservazione $a-b$ è multiplo di 9: vengono assegnati **due punti** (in totale) solo se le due osservazioni vengono combinate nell'osservazione che $a - b$ è divisibile per $9 \cdot 2023 = 18207$. Inoltre, il punto relativo all'osservazione che $a - b$ è multiplo di 2023 **non viene attribuito** per la semplice riscrittura $a - b = 2023(s(b) - s(a))$, ma solo se il concorrente menziona esplicitamente il fatto che $a - b$ debba essere multiplo di 2023.

   (iv) Per soluzioni parziali, vengono attribuiti fino a **2 punti** per una versione sufficientemente precisa della seguente affermazione: detti x, y due interi positivi e detto r il numero di riporti che si svolgono quando x, y vengono addizionati in colonna, si ha $s(x + y) = s(x) + s(y) - 9r$.

Ulteriori indicazioni

1. Osservazioni sulla divisibilità di $a-b$ per 3 (invece che per 9) non danno diritto a punti.

2. Esibire più di una soluzione, o anche famiglie infinite di soluzioni, non dà diritto a punti ulteriori (trattandosi di un problema di esistenza, un singolo esempio ha lo stesso valore di infiniti esempi).

3. Osserviamo esplicitamente che il numero costituito da una cifra 1 seguita da 2024 zeri si rappresenta compattamente come 10^{2024}, e non 10^{2025}; similmente, il numero costituito da 2024 cifre 9 è dato da $10^{2024}-1$, non $10^{2025}-1$. Sviste di questo tipo, purtroppo frequenti, **non sono state penalizzate** con una riduzione di punteggio, né nel caso di soluzioni da 7 punti, né nel caso di soluzioni da 3 punti della sola parte (a).

Esempi di punteggi: alcuni casi tipici

1. 1 punto è stato tipicamente assegnato nei seguenti casi:
   - (i) la soluzione contiene la sola osservazione che $a-b$ è multiplo di 9;
   - (ii) la soluzione contiene la sola osservazione che $a-b$ è multiplo di 2023 (parte (b)), oppure contiene separatamente le osservazioni che $a-b$ è multiplo di 9 e di 2023, ma non fa menzione del prodotto $9 \cdot 2023$;
   - (iii) la soluzione considera, nella parte (a), i numeri della forma $a = 999\ldots 9$ e il risultato dell'aggiungere un numero ad una cifra ad un tale a.

2. 2 punti sono stati tipicamente assegnati nei seguenti casi:
   - (i) la soluzione osserva (nella parte (a)) che 9 divide $a-b$ e considera numeri della forma $99\ldots 9 + k$;
   - (ii) l'elaborato esibisce una soluzione corretta per la parte (a), senza alcuna menzione né di come il risultato sia stato trovato, né di come possa essere verificato;
   - (iii) la soluzione osserva (nella parte (b)) la divisibilità di $a-b$ per $9 \cdot 2023$.

3. 3 punti sono stati tipicamente assegnati nei seguenti casi:
   - (i) soluzione corretta della sola parte (a);
   - (ii) soluzione corretta della parte (a) insieme all'osservazione che 9 divide $a-b$ nella parte (b).

4. 4 punti sono stati tipicamente assegnati nei seguenti casi:
   - (i) soluzione corretta della sola parte (b);
   - (ii) soluzione corretta della parte (b) insieme all'osservazione che 9 divide $a-b$ nella parte (a);
   - (iii) soluzione corretta della parte (a) insieme all'osservazione che 2023 divide $a-b$ nella parte (b).

5. 5 punti sono stati tipicamente assegnati nei seguenti casi:
   - (i) soluzione corretta della parte (a) insieme all'osservazione che $9 \cdot 2023$ divide $a-b$ nella parte (b).

6. 6 punti sono stati tipicamente assegnati nei seguenti casi:
   - (i) l'elaborato contiene una soluzione corretta della parte (a) e, nella parte (b), descrive una costruzione che porterebbe ad una coppia che soddisfa l'equazione, ma che viene inficiata da un qualche errore di calcolo.

     Ad esempio: '[...] Basta quindi trovare due numeri a, b tali che $b = a + 18207$ e nella somma in colonna $a + 18207$ avvengano 3 riporti. Troviamo allora la soluzione $a = 99, b = 18306$'. Questo non è corretto, perché si effettuano in effetti solo 2 riporti nello svolgere la somma indicata. Lo stesso punteggio di 6 è stato attribuito a soluzioni che, dalle stesse premesse, concludono '[...] Troviamo allora la soluzione $a = 99, b = a + 18207 = 20007$', in quanto chiaramente viziate da un errore di calcolo (in quanto $99 + 18207 = 18306$ e non 20007).
   - (ii) l'elaborato esibisce due coppie (a, b) che soddisfano rispettivamente le richieste della parte (a) e della parte (b) dell'esercizio, ma nella parte (a) non vi è alcuna menzione né di come il risultato sia stato trovato, né di come possa essere verificato.

7. 7 punti sono naturalmente stati assegnati per ogni soluzione completa e corretta.

Problema 4

> Su una circonferenza di centro O e diametro AB, fissiamo un punto C distinto da A e B. Facciamo poi variare un punto D, anch'esso distinto da A e B, sull'arco AB della circonferenza a cui non appartiene C, e definiamo E come il punto del segmento CD tale che le rette BE e CD sono perpendicolari.
>
> Dimostrare che il prodotto $CE \cdot ED$ è massimo, al variare di D, se e solo se i punti B, O, E, D giacciono su una stessa circonferenza.

Il problema si divideva essenzialmente in due parti:

- mostrare che la ciclicità richiesta è equivalente a D punto medio dell'arco AB a cui non appartiene C
- mostrare che il minimo richiesto si ottiene quando D è il punto medio dell'arco AB a cui non appartiene C

Caratterizzare D come punto medio dell'arco AB che non contiene C è stato ritenuto equivalente ad una delle seguenti uguaglianze $\widehat{AOD} = 90°$ o $\widehat{BOD} = 90°$ o $\widehat{BCD} = 45°$ o $\widehat{ACD} = 45°$ o $\widehat{DAO} = 45°$ o $\widehat{DBO} = 45°$.

Punti parziali

Sono stati attribuiti punti parziali (fino ad un massimo di 3 punti) per ciascuna delle seguenti osservazioni, quando non erano inserite in una soluzione completa (o pressoché completa):

- $CE \cdot ED = R^2 - OE^2$ - 1 punto
- E appartiene alla circonferenza di diametro BC - 1 punto
- B, O, E, D conciclici se (o solo se o entrambe) D punto medio dell'arco AB che non contiene C (o una delle uguaglianze d'angoli equivalenti elencate sopra) - fino a 2 punti.

Soluzioni con trigonometria o geometria analitica

Posto che una soluzione completa e corretta ottiene comunque 7, a prescindere dal metodo usato, i seguenti punteggi parziali sono stati dati nel caso di soluzioni che tentassero una strada algebrica e non giungessero alla fine.

- una formula per CE o ED - 1 punto
- una formula per $CE \cdot ED$ che dipendesse da una sola variabile (ed eventualmente da più parametri fissati) - 2 punti (che non si sommano al punto precedente).

Anche unendo l'approccio analitico a osservazioni sintetiche, ancora una volta in assenza di una soluzione completa (o pressoché completa) si poteva arrivare al massimo a 3 punti.

Altre soluzioni

Sono possibili altre soluzioni (ad esempio utilizzando solo calcoli di segmenti e disuguaglianza triangolare, oppure tramite il teorema di Tolomeo); di tali soluzioni abbiamo trovato solo istanze complete (valutate quindi 7 punti, con eventuali detrazioni per errori minori) e nessuna istanza parziale.

Detrazioni

- 1 punto è stato tolto a chi non si è assolutamente posto il problema di giustificare perché il minimo si ottiene quando E è l'intersezione interna alla circonferenza di centro O della circonferenza di diametro BC con la retta per il suo centro e O.
- 1 punto è stato tolto (coerentemente con il precedente) per errori nella giustificazione del calcolo del punto di massimo in soluzioni che utilizzassero trigonometria o geometria analitica.
- 2 punti sono stati tolti a chi ha svolto correttamente il problema, ma dimostrando solo una delle due implicazioni (il se o il solo se).
- 1 punto è stato tolto, in presenza di soluzioni complete o quasi complete, per omissioni ed errori non veniali.

Osservazioni senza valore

Le seguenti osservazioni sono state valutate 0 punti, in quanto non portano ad una soluzione del problema o ne sono troppo distanti.

- Osservare che $CE \cdot ED$ è la potenza di E rispetto alla circonferenza di diamentro AB, senza però scriverla in termini di raggio e distanza dal centro
- Trattare il caso particolare in cui C è punto medio della semicirconferenza.
- Utilizzare la disuguaglianza tra medie per affermare che $CE \cdot ED \leq CD^2/4$.
- Utilizzare la geometria analitica o la trigonometria per arrivare ad un'espressione di CE o di ED che contiene 2 variabili o più.
- Scrivere il teorema di Tolomeo per B, O, E, D senza ricavare $OE \geq \ldots$.

Punteggi parziali tipici

Riportiamo alcune tipologie di compito e il punteggio ad esse attribuito.

- Utilizzando AM-GM, arrivare a dire (sbagliando!) che CD deve essere massimo e quindi C e D devono essere diametralmente opposti, e dunque (?) punti medi delle rispettive semicirconferenze. Questo valeva 0 punti.
- Fare osservazioni parziali (come riscrivere $CE \cdot ED$ con raggio e OE, determinare il luogo dei punti E, dimostrare che la ciclicità è equivalente a un certo angolo retto, etc) senza caratterizzare il minimo richiesto in termini di D. Questo valeva da 1 a 3 punti a seconda del numero e dell'importanza delle osservazioni fatte.
- Fare correttamente l'esercizio, mostrando solo che se il prodotto è minimo allora i punti sono su una circonferenza. Questo valeva 5 punti.
- Fare correttamente l'esercizio senza giustificare in alcun modo perché il minimo corrispondesse all'opportuna posizione di E. Questo valeva 6 punti.

Problema 5

Siano a, b, c tre numeri reali (positivi, negativi o nulli) tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

(a) Determinare il massimo valore possibile per l'espressione

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

(b) Determinare il massimo valore possibile per l'espressione

$$(a-b)^2 \cdot (b-c)^2 \cdot (c-a)^2.$$

In entrambi i casi, specificare anche tutte le terne per cui il valore massimo viene raggiunto.

La parte (a) vale 3 punti, la parte (b) vale 4 punti.

Alcuni esempi tipici di punteggi parziali sono i seguenti.

- 0 punti sono stati assegnati a soluzioni che giungono, mediante procedimenti errati o comunque non utili, a valori non corretti per il massimo (ad esempio 12 o 16 per la prima parte, e 216 per la seconda).
- 0 punti sono stati assegnati a soluzioni che nella prima parte arrivano all'identità

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 12 - 2(ab + bc + ca),$$

  da cui deducono correttamente che il problema è equivalente a minimizzare $ab+bc+ca$, ma poi proseguono solo con ragionamenti qualitativi del tipo "il minimo sarà negativo" oppure "due variabili devono avere segno discorde".
- 1 punto è stato tipicamente assegnato alle soluzioni che contengono il valore del massimo per il punto (a) e/o per il punto (b), con indicazione di alcune terne che lo realizzano, senza una dimostrazione che si tratti effettivamente del massimo. Nota bene: trovare correttamente i valori del massimo sia nella parte (a) sia nella parte (b) vale comunque solo 1 punto, in assenza di ulteriore progresso verso una dimostrazione.
- 2 punti sono state assegnati alle soluzioni che nel punto (a) giungono all'identità

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 18 - (a+b+c)^2,$$

  senza ulteriori commenti su come concludere o sui casi di uguaglianza, oppure con conclusioni sbagliate (ad esempio asserire che il minimo per $(a+b+c)^2$ è un numero positivo).
- 3 punti sono state assegnati alle soluzioni che risolvono in maniera sostanzialmente completa la parte (a).
- 4 punti sono stati assegnati alle soluzioni che risolvono in maniera sostanzialmente completa la parte (a), e nella parte (b) fanno qualche passo sostanziale verso la riduzione del numero di variabili da 3 a 2.
- 5 punti sono stati assegnati alle soluzioni che risolvono in maniera sostanzialmente completa la parte (a), e nella parte (b) giungono alla conclusione che $a+b+c=0$.

Problema 6

> Dedalo acquista un numero finito di stringhe (ciascuna di lunghezza finita) composte dalle cifre binarie 0 e 1. Per ognuna delle stringhe acquistate, Dedalo paga $(1/2)^L$ dracme, dove L indica la lunghezza della stringa. Il Minotauro scappa se riesce a trovare una sequenza infinita di cifre binarie che non contiene nessuna delle stringhe acquistate da Dedalo. Dedalo deve intrappolare il Minotauro.
>
> Per esempio, se Dedalo acquistasse le stringhe 00 e 11, pagando mezza dracma, il minotauro potrebbe scappare con la sequenza infinita 01010101...
>
> D'altro canto, Dedalo può intrappolare il Minotauro con una spesa di 75 centesimi di dracma: gli basterà, per esempio, acquistare le stringhe 0 e 11, oppure le stringhe 00, 11, 01.
>
> Determinare tutti gli interi positivi c per cui Dedalo può intrappolare il Minotauro con una spesa minore o uguale a c centesimi di dracma.

Quasi tutti gli elaborati hanno conseguito 0, 1, o 2 punti. Il grosso degli elaborati da un punto o esibisce una soluzione di costo compreso fra 27 e 51 centesimi, oppure esibisce una soluzione più economica, ma senza fornire una dimostrazione corretta della sua efficacia. Il grosso degli elaborati da due punti esibisce una soluzione di costo compreso fra 20 e 26 centesimi, corredata di dimostrazione. Per questi punteggi, si è adottato un atteggiamento permissivo circa la correttezza formale degli argomenti. Un punteggio di 0 indica che non si è né raggiunta la soglia di costo dei 51 centesimi, né si sono espresse osservazioni rilevanti per la soluzione dell'esercizio.

Un errore comune è stato credere che un prezzo, talora il totale, talora quello di ciascuna stringa, dovesse essere, se espresso in centesimi, un numero intero. Questo fraintendimento, generalmente, conduce a ragionamenti fuorvianti, ed irrilevanti ai fini del punteggio. Tuttavia, alcuni degli elaborati affetti contengono, altresì, una scelta di stringhe del costo di 50 o 25 centesimi: questi hanno conseguito il punteggio corrispondente.

Un numero rilevante di elaborati tenta di argomentare l'esistenza di un costo minimo positivo, tipicamente 50 centesimi. Questi tentativi non aggiungono né tolgono punti.

Schema di correzione

Lo schema si articola attorno alla soglia dei 4 punti, per raggiungere la quale è necessario esibire un metodo che abbia la possibilità di risolvere il problema.

Soluzioni parziali $\leq$ 3 punti

L'osservazione che almeno una delle stringhe di Dedalo deve essere costituita da sole cifre 0, ed almeno una da sole cifre 1, isolatamente, non vale punti.

Valgono un punto non additivo:
affermare la risposta corretta
osservare che ogni stringa s può essere sostituita da $s0$ e $s1$

Scelte di stringhe per Dedalo sono valutate secondo il costo:
$\leq$ 51 centesimi – 1 punto, anche se senza dimostrazione
$\leq$ 26 centesimi – 2 punti se argomentata
$\leq$ 19 centesimi – 3 punti se argomentata
Eventuali soluzioni più economiche possono prendere più punti solo sulla base dell'utilità delle idee che si esprimono in esse, ai fini di una soluzione completa.

Valgono 1 o 2 punti, additivi fino ad un punteggio totale di 2 punti, lemmi di interesse matematico ma non risolutivi. I lemmi da due punti sono quelli che effettivamente si usano in uno dei percorsi risolutivi noti. Per esempio, vale un punto osservare che, senza perdita di generalità, si può assumere che tutte le stringhe di Dedalo abbiano la stessa lunghezza, oppure anche che il Minotauro fugga con una sequenza periodica. Un esempio di lemma da due punti è che basta risolvere l'esercizio per successioni 2^n-arie anziché binarie, con i costi opportunamente modificati.

Soluzioni generali ≥ 4 punti

Un metodo che permette a Dedalo di ridurre il costo di una qualunque soluzione data vale 4 punti.

La descrizione completa di un metodo risolutivo corretto, ancorché priva di dimostrazione, vale 5 punti.

Per esempio, fissate due stringhe s e t, acquistate da Dedalo, è possibile sostituire t con una combinazione equivalente, il cui costo è una frazione del costo di t che dipende da s. Se si specifica l'ordine corretto in cui applicare questa osservazione alle stringhe in gioco, si può ottenere un metodo risolutivo che vale 5 punti. Se, invece, non si specifica alcun ordine, allora il metodo non è completo, ma comunque permette di migliorare ogni data soluzione, vale così 4 punti.

Una soluzione completa, tipicamente costituita da un metodo per intrappolare il minotauro con spesa ≤ 1 centesimo, corredato di dimostrazione della correttezza dello stesso, vale 7 punti.

Errori

I punteggi sono concessi anche in presenza di errori tecnici che non inficiano la struttura del ragionamento, o di omissioni, con penalità di un punto per errore od omissione.

Errori di natura formale che possono essere corretti senza difficoltà, per esempio errori di calcolo o di copiatura, non comportano penalità.