XXXIX Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 5 maggio 2023

1. Siano a e b interi positivi tali che
$$54^a = a^b.$$
Dimostrare che a è una potenza di 54, cioè esiste un intero positivo c tale che $a = 54^c$.

2. Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo
   - per ogni $i = 1, \ldots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i,
   - cancella tutti i numeri scritti,
   - scrive sulla lavagna i numeri a_1, a_2, …, a_n.

   Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono `0`, `7`, `2`, `6`, `2`, dopo la prima mossa saranno `1`, `3`, `3`, `3`, `3`, dopo la seconda mossa saranno `1`, `1`, `5`, `5`, `5`, e così via.

   (a) Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.

   (b) Determinare, in funzione di n, il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k-esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.

3. Per ogni intero positivo n, indichiamo con $s(n)$ la somma delle cifre di n (nell'usuale rappresentazione in base 10). Così, per esempio, $s(8) = 8$, $s(2023) = 7$, $s(573) = 15$.

   (a) Determinare se esistono due interi positivi distinti a e b tali che
$$2023 \cdot a + s(a) = 2023 \cdot b + s(b).$$

   (b) Determinare se esistono due interi positivi distinti a e b tali che
$$a + 2023 \cdot s(a) = b + 2023 \cdot s(b).$$

4. Su una circonferenza di centro O e diametro AB, fissiamo un punto C distinto da A e B. Facciamo poi variare un punto D, anch'esso distinto da A e B, sull'arco AB della circonferenza a cui non appartiene C, e definiamo E come il punto del segmento CD tale che le rette BE e CD sono perpendicolari.

   Dimostrare che il prodotto $CE \cdot ED$ è massimo, al variare di D, se e solo se i punti B, O, E, D giacciono su una stessa circonferenza.

5. Siano a, b, c tre numeri reali (positivi, negativi o nulli) tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

   (a) Determinare il massimo valore possibile per l'espressione

   $$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

   (b) Determinare il massimo valore possibile per l'espressione

   $$(a-b)^2 \cdot (b-c)^2 \cdot (c-a)^2.$$

   In entrambi i casi, specificare anche tutte le terne per cui il valore massimo viene raggiunto.

6. Dedalo acquista un numero finito di stringhe (ciascuna di lunghezza finita) composte dalle cifre binarie `0` e `1`. Per ognuna delle stringhe acquistate, Dedalo paga $(1/2)^L$ dracme, dove L indica la lunghezza della stringa. Il Minotauro scappa se riesce a trovare una sequenza infinita di cifre binarie che non contiene nessuna delle stringhe acquistate da Dedalo. Dedalo deve intrappolare il Minotauro.

   Per esempio, se Dedalo acquistasse le stringhe `00` e `11`, pagando mezza dracma, il minotauro potrebbe scappare con la sequenza infinita `01010101`...

   D'altro canto, Dedalo può intrappolare il Minotauro con una spesa di 75 centesimi di dracma: gli basterà, per esempio, acquistare le stringhe `0` e `11`, oppure le stringhe `00`, `11`, `01`.

   Determinare tutti gli interi positivi c per cui Dedalo può intrappolare il Minotauro con una spesa minore o uguale a c centesimi di dracma.

XXXIX Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, May 5th, 2023

1. Let a and b be positive integers such that

$$54^a = a^b.$$

Show that a is a power of 54, that is, that there exists a positive integer c such that $a = 54^c$.

2. Let n be a positive integer. On a blackboard, Bobo writes a list of n non-negative integers. He then performs a sequence of moves, each of which is as follows:

   - for each $i = 1, \ldots, n$, he computes the number a_i of integers currently on the board that are at most i,
   - he erases all integers on the board,
   - he writes on the board the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

For instance, if $n = 5$ and the numbers initially on the board are `0`, `7`, `2`, `6`, `2`, after the first move the numbers on the board will be `1`, `3`, `3`, `3`, `3`, after the second they will be `1`, `1`, `5`, `5`, `5`, and so on.

   (a) Show that, whatever n and whatever the initial configuration, the numbers on the board will eventually not change any more.

   (b) As a function of n, determine the minimum integer k such that, whatever the initial configuration, moves from the kth onwards will not change the numbers written on the board.

3. For a positive integer n, denote by $s(n)$ the sum of the digits of n (in its usual decimal representation). For example, $s(8) = 8$, $s(2023) = 7$, $s(573) = 15$.

   (a) Determine whether there exist distinct positive integers a and b such that

$$2023 \cdot a + s(a) = 2023 \cdot b + s(b).$$

   (b) Determine whether there exist distinct positive integers a and b such that

$$a + 2023 \cdot s(a) = b + 2023 \cdot s(b).$$

4. Fix the point C on a circle centred at O with diameter AB, with C distinct from both A and B. Now let D vary among all points of the arc AB not containing C that are distinct from both A and B. Given D, let E be the point on the segment CD such that the lines BE and CD are perpendicular.

Prove that the product $CE \cdot ED$ attains its maximum, as D varies, precisely when B, O, E, D all lie on a circle.

5. Let a, b, c be real numbers (positive, negative, or zero) such that $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

   (a) Determine the maximum possible value for the expression
   $$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

   (b) Determine the maximum possible value for the expression
   $$(a-b)^2 \cdot (b-c)^2 \cdot (c-a)^2.$$

   In both cases, describe all the triples for which the maximum is achieved.

6. Dedalo buys a finite number of binary strings, each of finite length and made up of the binary digits `0` and `1`. For each string, he pays $(1/2)^L$ drachmas, where L is the length of the string. The Minotaur is able to escape the labyrinth if he can find an infinite sequence of binary digits that does not contain any of the strings Dedalo bought. Dedalo's aim is to trap the Minotaur.

   For instance, if Dedalo buys the strings `00` and `11` for a total of half a drachma, the Minotaur is able to escape using the infinite string `01010101`...

   On the other hand, Dedalo can trap the Minotaur by spending 75 cents of a drachma: he could for example buy the strings `0` and `11`, or the strings `00`, `11`, `01`.

   Determine all positive integers c such that Dedalo can trap the Minotaur with an expense of at most c cents of a drachma.

Problema 1 – Soluzione.

Osserviamo che $54 = 2 \cdot 3^3$, e pertanto a è divisibile sia per 2 sia per 3, e non ha altri fattori primi oltre a 2 e 3. In altri termini, a si scrive nella forma $a = 2^x \cdot 3^y$ per opportuni interi positivi x e y. Ne segue che

$$54^a = \left(2 \cdot 3^3\right)^{2^x \cdot 3^y} = 2^{2^x \cdot 3^y} \cdot 3^{3 \cdot 2^x \cdot 3^y} \qquad \text{e} \qquad a^b = \left(2^x \cdot 3^y\right)^b = 2^{xb} \cdot 3^{yb}.$$

Uguagliando gli esponenti del 2 e del 3 nelle due espressioni deduciamo che

$$2^x \cdot 3^y = xb \qquad \text{e} \qquad 3 \cdot 2^x \cdot 3^y = yb.$$

Confrontando le due uguaglianze concludiamo che $y = 3x$, e di conseguenza

$$a = 2^x \cdot 3^y = 2^x \cdot 3^{3x} = \left(2 \cdot 3^3\right)^x = 54^x,$$

come richiesto.

Problema 2 – Soluzione.

Chiamiamo *configurazione stabile* quella in cui sulla lavagna sono scritti tutti e soli i numeri da 1 ad n, e osserviamo che tale configurazione non cambia più quando Bobo applica la procedura descritta nel testo.

Dimostriamo che $2n$ mosse sono sempre sufficienti per arrivare alla configurazione stabile, qualunque sia la configurazione iniziale, e che $2n$ mosse possono effettivamente servire per opportune scelte della configurazione iniziale (e quindi $k = 2n + 1$).

Per arrivare nella configurazione stabile bastano $2n$ *mosse* Osserviamo anzitutto che i numeri calcolati durante una qualunque mossa verificano sempre le relazioni

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq n.$$

Infatti $a_i \leq a_{i+1}$ per ogni indice ammissibile i (questo perché se $x \leq i$, allora $x \leq i + 1$), e vi sono n numeri sulla lavagna, quindi $a_n \leq n$. Per semplicità, assumiamo che dopo ogni mossa Bobo scriva sulla lavagna i numeri $a_1, \ldots, a_n$ in ordine crescente.

Per quanto abbiamo appena rimarcato, dalla seconda mossa in poi, l'ultimo numero che si scrive alla lavagna è sempre n (ovvero, si calcola $a_n = n$). Nell'effettuare la terza mossa, poiché i numeri scritti alla lavagna sono interi minori o uguali ad n e l'ultimo è n, si calcolerà $a_{n-1} \leq n - 1$. Ma allora, poiché i numeri scritti dopo la terza mossa verificano le relazioni

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq n - 1 < a_n,$$

nell'effettuare la quarta mossa si trova $a_{n-1} = n - 1$, e così da allora in poi. Nel calcolo della quinta mossa avremo $a_{n-2} \leq n - 2$ (dato che la lista a questo punto contiene n ed $n - 1$), e nella sesta mossa $a_{n-2} = n - 2$.

Più in generale, dopo la mossa $2h$ avremo scritto alla lavagna (per ultimi) i numeri da $n - h + 1$ a n, dunque alla mossa $2h + 1$ calcoleremo $a_{n-h} \leq n - h$, e scriveremo esattamente $n - h$ numeri minori o uguali a $n - h$. Quindi alla mossa $2h + 2$ gli ultimi numeri scritti saranno $n - h, n - h + 1, \ldots, n$.

Dopo la mossa $2n$, i numeri scritti saranno $1, 2, 3, \ldots, n$, e tali rimarranno da allora in poi.

Per arrivare nella configurazione stabile possono servire $2n$ *mosse* Supponiamo che i numeri iniziali siano tutti strettamente maggiori di n. Dimostreremo che in tal caso sono necessarie $2n$ mosse per arrivare alla configurazione stabile. Quando $n = 1$ questa è una facile verifica (dopo una mossa sulla lavagna c'è il numero 0, dopo due mosse il numero 1).

In generale, dopo la prima mossa, i numeri sulla lavagna saranno tutti 0, e quindi dopo la seconda mossa saranno tutti uguali ad n. Come nella prima parte della dimostrazione, in tutte le mosse successive si calcolerà $a_n = n$, mentre il calcolo di a_i per $i < n$ non è influenzato dalla presenza di $a_n = n$ (in quanto n non è $\leq i$ per alcun $i < n$). In particolare, il gioco prosegue operando solo sugli $n-1$ numeri più piccoli fra gli n presenti, e nella situazione dopo la seconda mossa questi $n - 1$ numeri sono tutti uguali ad n.

Consideriamo allora solo i numeri $a_1, \ldots, a_{n-1}$, ignorando a_n (che d'ora in poi resterà sempre uguale ad n). Il gioco continua come se coinvolgesse solo $n-1$ numeri, che inizialmente sono tutti maggiori di $n-1$ (in quanto uguali ad n). Si ripete allora la stessa analisi appena svolta: dopo una mossa tutti questi numeri saranno sostituiti da 0, e dopo due mosse saranno tutti uguali ad $n-1$. Da questo punto in poi, per lo stesso motivo di prima avremo sempre $a_{n-1} = n-1$, e quindi il gioco continuerà come se coinvolgesse solo $a_1, \ldots, a_{n-2}$ (che prima diventeranno tutti zeri, e poi tutti $n-2$). In particolare, dopo 2 mosse il numero a_n diventa per la prima volta pari ad n (e poi non cambia più), dopo 4 mosse il numero a_{n-1} diventa per la prima volta pari ad $n-1$ (e poi non cambia più), e così via: dopo $2h$ mosse, il numero a_{n+1-h} diventa per la prima volta uguale a $n+1-h$, e poi non cambia più. Il numero $a_1 = a_{n+1-n}$ diventa allora uguale ad 1 per la prima volta dopo $2n$ mosse: sono quindi effettivamente necessarie $2n$ mosse per arrivare alla configurazione stabile.

Problema 3 – Soluzione.

Soluzione punto (a) Esistono: basta prendere, per esempio, $a = 10^{2024} - 1$ e $b = 10^{2024} + 8$.

Per dimostrarlo, osserviamo che la scrittura in base 10 di a è costituita da 2024 cifre 9 consecutive, per cui $s(a) = 9 \cdot 2024$, mentre b si scrive con una cifra 1 seguita da 2023 cifre 0 ed una cifra 8, per cui $s(b) = 9$. A questo punto

$$2023 \cdot (b - a) = 2023 \cdot 9 = 2024 \cdot 9 - 9 = s(a) - s(b),$$

che è equivalente alla tesi.

Soluzione punto (b) Esistono: basta prendere, per esempio, $a = 793$ e $b = 19\,000$ (fra le soluzioni con $a < b$ questa è anche quella con b più piccolo possibile). Infatti

$$b - a = 18\,207 = 2023 \cdot 9 = 2023 \cdot (19 - 10) = 2023 \cdot (s(a) - s(b)),$$

che è equivalente alla tesi.

Euristica per il punto (a) Una possibile strategia per individuare un esempio è la seguente. Osserviamo che, se scriviamo $b = a + k$, allora

$$2023 \cdot b + s(b) = 2023 \cdot a + 2023 \cdot k + s(a + k),$$

e l'equazione originale diventa

$$s(a) = 2023 \cdot k + s(a + k),$$

il che mostra chiaramente che $s(a + k)$ deve essere molto più piccola di $s(a)$.

È allora naturale scegliere come a un numero composto interamente da cifre 9 e k piccolo (ad esempio, ad una cifra), in modo che $b = a + k$ sia un numero che inizia con la cifra 1, seguita da molte cifre zero, e quindi $s(b)$ sia molto inferiore a $s(a)$.

A questo punto si tratta solo di scegliere correttamente k ed il numero di cifre 9 in a: se a è composto da c cifre uguali a 9, allora $s(a) = 9c$. Prendendo come k un numero ad una sola cifra, $b = a + k$ si scrive con una cifra 1, seguita da molti zeri e infine dalla cifra $k - 1$, per cui $s(b) = s(a + k) = k$. Sostituendo queste scelte nell'equazione iniziale otteniamo

$$2023a + s(a) = 2023a + 9c \qquad \text{e} \qquad 2023b + s(b) = 2023a + 2023k + k,$$

ovvero abbiamo l'equazione $9c = 2024k$. Siccome cerchiamo k costituito da una sola cifra, è naturale prendere $k = 9$ e $c = 2024$, il che fornisce la soluzione descritta sopra.

Euristica per il punto (b) Una possibile strategia per trovare un esempio è la seguente. Scrivendo l'equazione nella forma

$$b - a = 2023 \cdot (s(a) - s(b))$$

osserviamo che la differenza $b-a$ è multipla di 2023. D'altro canto, è ben noto che la somma delle cifre di a lascia lo stesso resto di a nella divisione per 9: scrivendo allora $s(a) = a - 9x, s(b) = b - 9y$ otteniamo $b - a = 2023(a - 9x - b + 9y)$, ovvero

$$2024(b - a) = 9 \cdot 2023 \cdot (y - x).$$

Siccome 9 e 2024 non hanno fattori primi in comune, questa equazione mostra che $b - a$ è divisibile anche per 9. Inoltre, neppure 2023 ha fattori in comune con 9, quindi $b - a$ (essendo multiplo di 2023 e di 9) è multiplo di $9 \cdot 2023 = 18\,207$.

Scriviamo a questo punto $b = a + 18\,207k$ e sostituiamo nell'equazione iniziale: troviamo che

$$a + 2023 \cdot s(a) = a + 18\,207k + 2023 \cdot s(a + 18\,207k),$$

da cui

$$s(a) = 9k + s(a + 18\,207k).$$

Provando a scegliere $k = 1$, vorremmo trovare due numeri a e $b = a + 18\,207$ tali che la somma delle cifre di b sia inferiore di 9 rispetto alla somma delle cifre di a. A questo punto non è difficile concludere: per far sì che $s(a + 18\,207)$ sia più piccola di $s(a)$ vorremo che ci sia un qualche riporto, e una delle scelte più semplici da provare è proprio $a = 793$, in modo che $a + 18\,207 = 19\,000$ abbia molte cifre 0. Si verifica subito che questa scelta funziona.

Soluzioni generali È possibile trovare soluzioni generali alle equazioni del testo, in cui 2023 è sostituito da un qualsiasi intero positivo N. La prima equazione in forma generale, $N \cdot a + s(a) = N \cdot b + s(b)$, ammette come soluzione $a = 10^{N+1} - 1, b = a + 9$: infatti $N \cdot (b - a) = 9N = 9(N + 1) - 9 = s(a) - s(b)$.

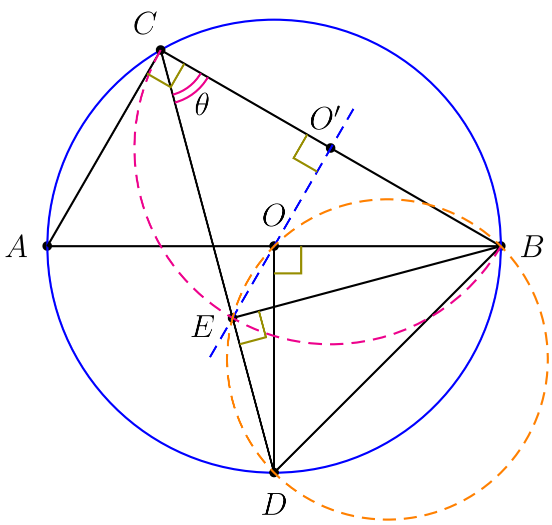
Per studiare la seconda equazione in forma generale, $a + N \cdot s(a) = b + N \cdot s(b)$, osserviamo che vale l'identità $s(x + y) = s(x) + s(y) - 9r(x, y)$, dove $r(x, y)$ è il numero di riporti che si ottengono sommando x, y in colonna. Definiamo allora $B = 1 + \frac{s(9N)}{9}$ e chiamiamo C il numero di cifre di $9N$ meno uno; poniamo poi $a = 10^C(10^B - 1)$ e $b = a + 9N$.

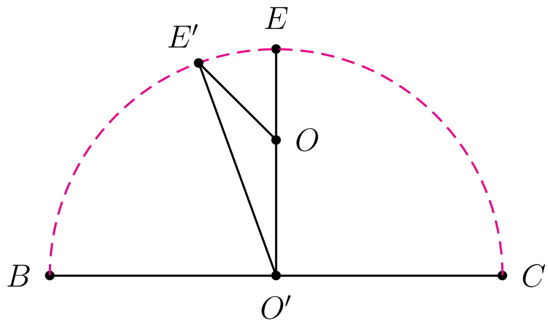
Il numero a è allora costituito da B cifre 9 seguite da C cifre 0 (in particolare, $s(a) = 9B = 9 + s(9N)$). Sommando a e $9N$ in colonna, per costruzione avvengono B riporti (ogni cifra 9 causa uno e un solo riporto), quindi $r(a, 9N) = B$ e $s(b) = s(a + 9N) = s(a) + s(9N) - 9r(a, 9N) = 9B + s(9N) - 9B = s(9N)$. Sostituendo nell'equazione iniziale si ha allora

$$b - a = 9N = N(9 + s(9N) - s(9N)) = N(s(a) - s(b)).$$

Problema 4 – Soluzione.

Con riferimento alla figura a sinistra, indichiamo con θ l'ampiezza dell'angolo $\angle BCD$.





La soluzione del problema si può suddividere nei seguenti sei passi.

- I punti B, O, E, D stanno su una stessa circonferenza se e solo se D è il punto medio dell'arco AB su cui si trova.

  Infatti, basta osservare che i quattro punti stanno su una stessa circonferenza se e solo se $\angle DOB = \angle DEB$. Inoltre, $\angle DEB = 90°$ per costruzione, quindi i quattro punti stanno su una stessa circonferenza se e solo se $\angle DOB = 90°$. Quest'ultima uguaglianza vale se e solo se il raggio OD è perpendicolare al diametro AB, il che è vero se e solo se D è il punto medio dell'arco AB.

- Il punto D è il punto medio dell'arco AB su cui si trova se e solo se $\theta = 45°$.

  Infatti, basta osservare che i due angoli $\angle ACD$ e $\angle DCB$ hanno entrambi ampiezza θ, in quanto insistono sugli archi AD e DB che hanno la stessa lunghezza, e la somma dei due angoli è uguale ad $\angle ACB$, che è un angolo retto perché AB è diametro.

- Il punto E appartiene alla semicirconferenza di diametro CB e situata dalla stessa parte di A rispetto alla retta BC.

  Infatti, basta osservare che il punto E, per costruzione, vede il segmento CB sotto un angolo di $90°$ (e sta dalla stessa parte di A rispetto alla retta BC).

- Massimizzare il prodotto $CE \cdot ED$ è equivalente a minimizzare la distanza di E da O.

  Affermiamo infatti che il prodotto $CE \cdot ED$ vale $R^2 - OE^2$, dove R è la lunghezza OA del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Questo si può dedurre applicando il teorema delle due corde alla corda CD e alla corda passante per O ed E, divisa da E in segmenti di lunghezza $R + OE$ ed $R - OE$. In altre parole, il prodotto $CE \cdot ED$ è per definizione la potenza del punto E rispetto alla circonferenza iniziale, e la potenza di un qualunque punto E interno ad una circonferenza di raggio R e centro O è uguale a $R^2 - OE^2$.

- Indichiamo con O' il punto medio del segmento BC, che come già visto è anche il centro di una semicirconferenza su cui si trova E. Il punto di tale semicirconferenza più vicino ad O si ottiene intersecando la semicirconferenza con la retta OO'.

  Infatti, con riferimento alla figura di destra, indichiamo con E tale intersezione, e con E' un qualunque altro punto della semicirconferenza. Allora dalla disuguaglianza triangolare (in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due) deduciamo che

  $$O'O + OE = O'E = O'E' < O'O + OE',$$

  da cui semplificando $O'O$ si conclude che $OE < OE'$, come richiesto.

- Il punto E coincide con il punto precedentemente definito, e quindi massimizza il prodotto $CE \cdot ED$, se e solo se $\theta = 45°$.

  Infatti, dalla costruzione precedente segue che il triangolo $EO'C$ è un triangolo rettangolo in O' e isoscele.

Soluzione alternativa Come nei primi due punti della soluzione precedente otteniamo che i punti B, O, E, D stanno su una stessa circonferenza se e solo se $\theta = 45°$.

Ora dimostriamo in modo alternativo che E massimizza il prodotto $CE \cdot ED$ se e solo se $\theta = 45°$.

Intanto osserviamo che nel triangolo rettangolo BEC vale la relazione $CE = CB \cdot \cos\theta$. Osserviamo poi che $\angle CDB = \angle CAB$, in quanto insistono sulla stessa corda CB. Di conseguenza, indicata con α l'ampiezza comune di questi angoli, nel triangolo rettangolo BDE vale la relazione $ED = BD \cdot \cos\alpha$. Infine, dal teorema dei seni sappiamo che $DB = 2R \cdot \sin\theta$, dove R è il raggio della circonferenza iniziale.

Mettendo insieme queste tre uguaglianze, ed applicando la formula di duplicazione del seno, deduciamo che

$$CE \cdot ED = (CB \cdot \cos\theta) \cdot (2R \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha) = CB \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot \sin(2\theta).$$

Dal momento che CB, R ed α sono fissi, è evidente che il prodotto risulta massimo quando $2\theta = 90°$, e cioè $\theta = 45°$.

Problema 5 – Soluzione.

Il massimo valore possibile è 18, e viene realizzato da tutte e sole le terne che, oltre alla condizione $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, verificano anche $a + b + c = 0$ (ad esempio la terna con $a = b = 1$ e $c = -2$).

Per dimostrarlo basta osservare che

$$\begin{aligned}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= 2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) \\ &= 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 \\ &= 18 - (a+b+c)^2 \\ &\le 18,\end{aligned}$$

e che nell'ultimo passaggio vale il segno di uguale se e solo se $a + b + c = 0$.

Domanda (b) Il massimo valore possibile è 108, e viene realizzato da tutte e sole le terne in cui le tre variabili valgono, in qualche ordine, 0 e $\pm\sqrt{3}$.

Iniziamo osservando che, a meno di permutazioni, possiamo sempre supporre che i tre numeri verifichino la relazione $a \le b \le c$. Ricordiamo anche che

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} \le \frac{(x+y)^2}{4}$$

per ogni coppia di numeri reali x e y (si tratta sostanzialmente della disuguaglianza classica tra media geometrica e media aritmetica), con uguaglianza se e solo se $x = y$. Applicando questa disuguaglianza con $x = b - a$ e $y = c - b$ otteniamo allora che

$$(b-a)\cdot(c-b) \le \frac{(c-a)^2}{4}, \tag{1}$$

da cui facendo i quadrati (che non cambiano il verso delle disuguaglianze dal momento che $b-a$ e $c-b$ sono maggiori o uguali a 0) si deduce che

$$(a-b)^2\cdot(b-c)^2\cdot(c-a)^2 \le \frac{(c-a)^6}{16}.$$

Osserviamo infine che

$$(c-a)^2 = c^2 + a^2 - 2ac = 2(a^2+c^2) - (a+c)^2 \le 2(a^2+b^2+c^2) = 12, \tag{2}$$

da cui concludiamo che

$$(a-b)^2\cdot(b-c)^2\cdot(c-a)^2 \le \frac{12^3}{16} = 108.$$

Per avere l'uguaglianza deve valere il segno di uguale nella (2), il che accade se e solo se $b = 0$ e $c = -a$, condizione che garantisce anche che $x = y$ e quindi l'uguaglianza nella (1).

Soluzione alternativa alla domanda (b) Poniamo

$$x = a - b, \qquad y = b - c, \qquad z = c - a. \tag{3}$$

A meno di permutazioni, possiamo fare in modo che $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (basta infatti che sia $c \leq b \leq a$). Dalla domanda (a) sappiamo che x, y, z soddisfano la disuguaglianza

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 18, \tag{4}$$

oltre ovviamente all'uguaglianza $x + y + z = 0$, cioè $z = -(x + y)$. Quello che dobbiamo fare è massimizzare il prodotto $x^2y^2z^2$. Ponendo $s = x + y$ e $p = xy$, osserviamo che $s \geq 0$ e $p \geq 0$, e inoltre

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (x + y)^2 - 2xy + (x + y)^2 = 2s^2 - 2p,$$

il che ci permette di riscrivere la condizione (4) come $2s^2 - 2p \leq 18$, cioè $s^2 \leq 9 + p$. Infine, per la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica, già citata nella prima soluzione, sappiamo che

$$p = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{s^2}{4}.$$

Mettendo insieme queste informazioni deduciamo che

$$s^2 \leq 9 + p \leq 9 + \frac{s^2}{4},$$

cioè $4s^2 \leq 36 + s^2$, da cui concludiamo che $s^2 \leq 12$, e quindi

$$x^2y^2z^2 = p^2s^2 \leq \left(\frac{s^2}{4}\right)^2 s^2 = \frac{s^6}{16} \leq \frac{12^3}{16} = 108.$$

Per avere uguaglianza serve in particolare che $s^2 = 12$ e $x = y$ (condizione necessaria e sufficiente per l'uguaglianza tra media aritmetica e geometrica), da cui $x^2 = y^2 = 3$, cioè (ricordando che x e y sono non negativi) $x = y = \sqrt{3}$. Ritornando allora alle uguaglianze (3) otteniamo che

$$a = b + \sqrt{3}, \qquad \text{e} \qquad c = b - \sqrt{3},$$

e in particolare

$$6 = a^2 + b^2 + c^2 = \left(b + \sqrt{3}\right)^2 + b^2 + \left(b - \sqrt{3}\right)^2 = 3b^2 + 6,$$

da cui concludiamo che $b = 0$ e di conseguenza $a = \sqrt{3}$ e $c = -\sqrt{3}$.

Problema 6 – Soluzione.

Per ogni $c > 0$ (anche non necessariamente intero), il lucchese Dedalo, di origini genovesi, può imprigionare il Minotauro spendendo meno di c centesimi di dracma.

Lemma. *Per ogni coppia di interi positivi k ed m, la spesa per acquistare tutte le stringhe di lunghezza mk in cui non compaiono mai k o più zeri consecutivi è minore o uguale di*

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m$$

dracme.

Per dimostrarlo, osserviamo intanto che il costo di ciascuna di queste stringhe è di 2^{-mk} dracme. Questa spesa va moltiplicata per il numero totale di stringhe di lunghezza mk che non contengono k (o più) zeri consecutivi. Il numero esatto di queste stringhe è difficile da calcolare, ma per maggiorare il prezzo a Dedalo basta trovare una stima superiore.

Per far questo, dividiamo la stringa di lunghezza mk in m blocchi di lunghezza k, e osserviamo che ogni blocco di lunghezza k può essere una qualsiasi stringa binaria, salvo quella costituita da sole cifre `0`. Siccome le stringhe binarie di lunghezza k sono 2^k, ne segue che per ogni blocco ci sono $2^k - 1$ scelte possibili. Avendo m blocchi, il numero totale di stringhe è al massimo $(2^k - 1)^m$, dunque il costo totale non supera

$$\frac{1}{2^{mk}} \cdot \left(2^k - 1\right)^m = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m,$$

come richiesto. □

Dato ora un qualunque $c > 0$, scegliamo k in modo tale che $1/2^k < c/200$, e una volta visto k scegliamo m in modo tale che

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^m < \frac{c}{200}.$$

A questo punto Dedalo acquisterà la stringa costituita da k cifre `0`, la quale è in grado di bloccare tutte le sequenze che da qualche parte contengono almeno k cifre `0` consecutive, più tutte le stringhe di lunghezza mk in cui non compaiono mai k o più zeri consecutivi, in grado di bloccare tutte le altre possibili sequenze semplicemente considerando il primo blocco di mk caratteri.

Il tutto, spendendo meno di $c/200 + c/200 = c/100$ dracme!

Soluzione alternativa Presentiamo una versione alternativa del Lemma precedente, che prevede l'acquisto di un numero inferiore di stringhe, e permette comunque di concludere in maniera analoga. Per semplicità, chiamiamo k-sequenza una qualunque sequenza infinita nella quale non compaiono mai $k + 1$ (o più) zeri consecutivi.

Lemma. *Per ogni coppia di interi $k \geq 0$ ed $m \geq 0$, Dedalo può imprigionare tutte le k-sequenze acquistando $(k+1)^m$ stringhe che terminano tutte con la cifra* `1` *e spendendo in totale*

$$\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^m$$

dracme.

Per dimostrarlo, supponiamo che k sia un parametro fisso e procediamo per induzione su m. Il caso $m = 0$ è facile, in quanto basta acquistare la stringa `1`.

Supponiamo ora l'enunciato vero per un certo m, e dimostriamolo per $m + 1$. Siano S_1, $\ldots$, $S_{(k+1)^m}$ delle stringhe capaci di imprigionare una qualunque k-sequenza. Sostituiamo ora ciascuna di queste stringhe, diciamo la stringa S_i, con le $k + 1$ stringhe ottenute aggiungendo a destra di S_i le stringhe

$$\texttt{1}, \qquad \texttt{01}, \qquad \texttt{001}, \qquad \ldots, \qquad \underbrace{\texttt{0...0}}_{k}\texttt{1}$$

L'osservazione fondamentale è che, se S_i è in grado di bloccare una certa k-sequenza, allora anche una delle nuove stringhe è in grado di bloccare la stessa k-sequenza, semplicemente posizionandosi nello stesso punto. Infatti, una k-sequenza che contiene S_i può proseguire a destra di S_i solo in uno dei $k + 1$ modi indicati.

Detta L_i la lunghezza di S_i, il costo delle $k + 1$ stringhe che sostituiscono S_i è

$$\frac{1}{2^{L_i+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{L_i+k+1}} = \frac{1}{2^{L_i}} \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2^{L_i}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right),$$

e dunque è uguale a quello di S_i moltiplicato per un fattore fisso minore di uno.

Se ora applichiamo lo stesso procedimento a tutte le $(k+1)^m$ stringhe che andavano bene al passo m, otteniamo $(k+1)^{m+1}$ stringhe che vanno ancora bene ed hanno un costo totale uguale a quello precedente moltiplicato per il fattore fisso comune $(1 - 1/2^{k+1})$. Inoltre, terminano ancora tutte con la cifra `1`. $\square$