Unione Matematica Italiana
Progetto Olimpiadi della Matematica

IX Gara Nazionale per le Classi Prime 2024

Risposte esatte

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Test n. 1	E	C	E	A	C	B	B	A	A	C	A	E	D	A	C	C	B	A
Test n. 2	E	D	B	B	E	D	D	C	A	C	A	E	A	C	B	A	D	E
Test n. 3	B	C	E	A	E	B	B	A	D	C	B	B	B	D	B	E	B	D
Test n. 4	B	D	A	D	D	D	A	C	D	E	C	C	A	B	B	E	D	B

Soluzioni (test n. 1)

1. Un triangolo scaleno e con area diversa da zero ha tutti gli angoli con misura un numero intero positivo di gradi. Quanto vale, al massimo, la differenza in gradi tra due angoli?

A) 175 B) 179 C) 178 D) 177 E) 176

La risposta corretta è la E

Con le condizioni descritte non si può avere un angolo di misura 0°. Dette $\alpha < \beta < \gamma$ le misure in gradi dei tre angoli, risulta $\gamma = 180 - \alpha - \beta$ da cui la differenza fra il maggiore e il minore risulta uguale a $\gamma - \alpha = 180 - 2\alpha - \beta$ e quindi conviene prendere α il più piccolo possibile ($\alpha = 1$) e analogamente β il più piccolo possibile ($\beta = 2$, in quanto se fosse $\beta = 1$ il triangolo sarebbe isoscele). Da cui ne consegue che $\gamma - \alpha = 180 - 2 - 2 = 176$.

2. Sull'isola dei furfanti (che mentono sempre) e dei cavalieri (che dicono sempre il vero) vivono 10 persone. Cinque di queste stanno zitte mentre ognuna delle altre cinque fa un'affermazione: "Qui siamo tutti furfanti!"; "Qui siamo tutti cavalieri!"; "Almeno 4 di noi sono furfanti"; "Esattamente 6 di noi sono furfanti"; "Al massimo 5 di noi sono cavalieri". Quanti sono al massimo i cavalieri nell'isola?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 8 E) 7

La risposta corretta è la C

Analizziamo ciascuna affermazione. La persona che afferma "Qui siamo tutti furfanti" non può essere un cavaliere (altrimenti direbbe il vero, e quindi le 10 persone sarebbero tutte furfanti, contro l'ipotesi che lui è un cavaliere) e quindi è un furfante. D'altro canto, anche la seconda persona è un furfante, perché non è vero che sono tutti cavalieri (abbiamo appena osservato che la prima persona che parla è un furfante). Se la terza persona fosse un furfante, i furfanti sarebbero al più 3, ma allora la persona successiva dovrebbe essere un cavaliere e dire la verità (ci sono esattamente 6 furfanti), mentre abbiamo appena detto che i furfanti sono al più 3. Dunque la terza persona deve essere un cavaliere: pertanto, ci sono almeno 4 furfanti e, di conseguenza, il numero dei cavalieri è al massimo 6. La presenza di 4 furfanti e 6 cavalieri è compatibile con le ultime due affermazioni: in particolare, se gli ultimi due sono furfanti, ci sono esattamente 4 furfanti e 6 cavalieri (la terza persona e tutti quelli che non hanno parlato).

3. Cinque numeri interi positivi consecutivi, minori di 100, sono tali che la loro media è un numero intero pari e il loro prodotto è un multiplo sia di 11 che di 13. Quante cinquine sono possibili?

A) 4 B) 7 C) 5 D) 6 E) 8

La risposta corretta è la E

Indichiamo i cinque numeri con $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$, con $x>2$ e $x<98$. La media risulta $\frac{(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)}{5}=\frac{5x}{5}=x$, dunque x deve essere pari. Si verifica facilmente che gli unici valori che può assumere la x e che permettono di avere un prodotto multiplo sia di 11 che di 13 sono $x=12, 24, 54, 64, 66, 76, 78, 90$, vale a dire 8 valori.

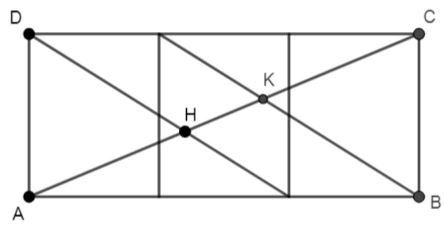
4. Simone mette in ordine crescente le misure degli angoli interni di un poligono convesso di n lati (con $n>2$), ed osserva che ogni angolo, a partire dal secondo, misura 30° in più rispetto al precedente. Quanto può valere al massimo n?

A) 5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

La risposta corretta è la A

Chiamiamo con $x>0$ la misura in gradi dell'angolo più piccolo in modo che gli altri angoli misurano in ordine $x+30°$, $x+60°$, $x+90°$, $x+120°$, $x+150°$. Sicuramente non è possibile andare avanti perché già $x+180°>180°$ e il poligono non sarebbe più convesso. Dunque per ora escludiamo $n>6$. Si osserva che con $n=6$ non è possibile costruire un poligono che soddisfi anche la condizione della somma degli angoli $S=(6-2)\cdot 180°=720°$. Infatti $x+(x+30°)+(x+60°)+(x+90°)+(x+120°)+(x+150°)=6x+450°=720°$, da cui $x=45°$. In questo modo però l'ultimo angolo misura $45°+150°=195°>180°$, quindi $n=6$ non va bene. Provando con $n=5$ si ottiene $5x+300°=540°$, da cui $x=48°$ e l'angolo più grande vale $48°+120°=168°<180°$, quindi $n=5$ va bene ed è la soluzione.

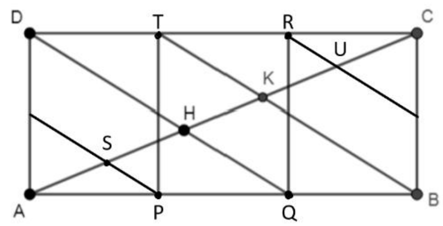
5. Il rettangolo in figura è suddiviso in tre rettangoli congruenti, ciascuno di base 20 cm e altezza 25 cm. Determina la misura di HK in cm.



A) 14 B) 12 C) 13 D) 10 E) 11

La risposta corretta è la C

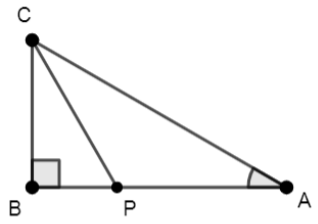
Si tracciano le parallele a DQ e a TB (da P e da R) come in figura. Dalla congruenza tra AP, PQ e QB segue la congruenza tra AS, SH e HK (per Talete). Analogamente dalla congruenza di DT, TR e RC segue la congruenza tra HK, KU e UC. Risulta così essere $HK=\frac{1}{5}AC$. Per Pitagora $AC=\sqrt{60^2+25^2}=65$ cm, dunque $HK=13$ cm.



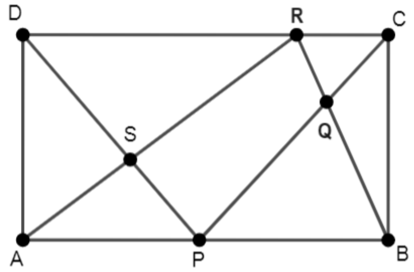
6. Sia ABC un triangolo con $\hat{B}=90°$, $\hat{A}=30°$, e sia P un punto di AB tale che l'angolo $C\hat{P}B$ sia uguale a 60°. Se $AP=30$ cm, quanto è lungo PB in cm?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

La risposta corretta è la B



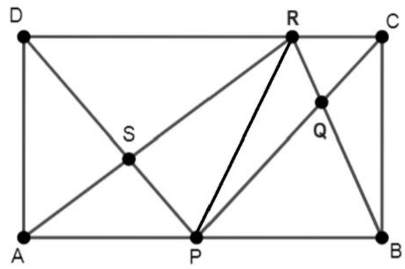
Si consideri il triangolo APC. Esso è isoscele sulla base AC in quanto $\hat{A} = 30°$ per ipotesi, $A\hat{P}C = 180° - 60° = 120°$ e quindi $A\hat{C}P = 30°$. Il triangolo BPC è la metà di un triangolo equilatero, con $PC = 30$ cm e PB, essendo il lato opposto a $B\hat{C}P = 30°$, è uguale a metà ipotenusa, vale a dire 15 cm.



7. Il giardino di Santina ha la forma di un rettangolo e viene suddiviso in 7 zone nel modo indicato in figura. Sappiamo solo che il triangolo ASD ha area 47 m^2 e il quadrilatero $SPQR$ ha area 89 m^2. Quanto misura, in m^2, l'area del triangolo BCQ?

A) 46 B) 42 C) 40 D) i dati non sono sufficienti
E) nessuna delle precedenti

La risposta corretta è la B



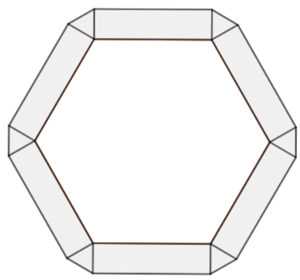
Avendo la stessa base e la stessa altezza, triangoli APD e APR hanno la stessa area, pertanto, per differenza (sottraendo ad entrambi l'area di APS), risultano equivalenti ASD e SPR; lo stesso può dirsi dei triangoli RPQ e BCQ. Poiché l'area di RPQ è $89 - 47 = 42$ m^2, anche l'area di BCQ sarà 42 m^2.

8. Qual è la somma delle cifre delle unità dei numeri $2024, 2024^2, 2024^3, \dots, 2024^{2024}$?

A) 10120 B) 10000 C) 8096 D) 12144 E) 10^{2024}

La risposta corretta è la A

Sia $1 \leq k \leq 1012$. La cifra dele unità di 2024^{2k-1} è uguale a 4, mentre quella di 2024^{2k} è uguale a 6. Pertanto la somma cercata è uguale a $4 \cdot 1012 + 6 \cdot 1012 = 1012 \cdot (4 + 6) = 1012 \cdot 10 = 10120$.



9. La siepe del giardino sotto casa di Lorenzo ha forma di esagono regolare ed è delimitata da un muretto il cui bordo più esterno ha forma dodecagonale composto da 6 rettangoli, tutti uguali tra loro e ciascuno di perimetro 20 m, e 6 triangoli, come mostrato in figura. Quanto vale il perimetro del dodecagono (in metri)?

A) 60 B) 70 C) 48 D) 54 E) $115/2$

La risposta corretta è la A

Poiché l'esagono è regolare, ciascun angolo interno vale $\frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$. Di conseguenza ciascun triangolo ha l'angolo in corrispondenza del vertice condiviso con un vertice dell'esagono di $360° - 2 \cdot 90° - 120° = 60°$. Inoltre, essendo i rettangoli tutti uguali tra loro, i triangoli hanno i lati coincidenti con i lati dei rettangoli uguali, e dunque sono triangoli equilateri. Ne consegue che il perimetro del dodecagono, essendo formato da sei lati lunghi e sei lati corti dei rettangoli, è lungo tre volte il perimetro di un rettangolo, vale a dire $20 \cdot 3 = 60$ m.

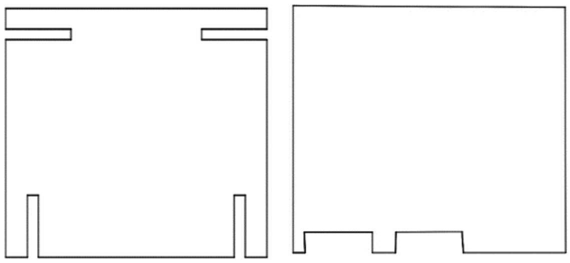
10. La giacca di Sandro ha 12 tasche. Quante monete deve possedere Sandro, come minimo, se vuole disporle nelle tasche in modo che ogni tasca contenga un numero diverso di monete? Si tenga presente che una tasca potrebbe anche essere vuota.

A) 64 B) 55 C) 66 D) 72 E) 78

La risposta corretta è la C

Nella prima tasca possono non essere messe monete, nella seconda tasca 1 moneta, nella terza tasca 2 monete, nella quarta tasca 3 monete e così via fino ad arrivare alla dodicesima tasca dove possono essere messe 11 monete. Ne consegue che il numero minimo di monete possedute deve essere uguale a $1+2+3+\cdots+11=\frac{11\cdot 12}{2}=66$.

11. Considera le due figure (non in scala). Entrambe sono ottenute togliendo da un quadrato di perimetro 96 cm rispettivamente 4 e 2 rettangoli tutti uguali tra loro. Nella prima figura sul perimetro del quadrato di partenza stanno i lati corti dei rettangoli asportati mentre nella seconda figura ci stanno i lati lunghi. Sapendo che i perimetri delle due figure sono 160 cm la prima e 108 cm la seconda, quanto vale l'area della prima figura in cm^2?



A) 480 B) 512 C) 524 D) 528
E) c'è più di una soluzione

La risposta corretta è la A

Siano a, b rispettivamente le misure in cm del lato lungo e di quello corto dei rettangolini sottratti al quadrato. Il perimetro della figura di sinistra è quello del quadrato sommato a $8a$, da cui $a=\frac{160-96}{8}=8$. Analogamente il perimetro della figura di destra è quello del quadrato sommato $4b$, da cui $b=\frac{108-96}{4}=3$. Infine la misura dell'area richiesta è $\left[\left(\frac{96}{4}\right)^2-4\cdot 3\cdot 8\right]=480$ cm^2.

12. Se il numero intero positivo n è un quadrato perfetto, quale sarà il quadrato perfetto successivo?

A) $n+1$ B) $n+\sqrt{n}$ C) $n+\sqrt{n}+1$ D) $n+2\sqrt{n}$ **E)** $\boldsymbol{n+2\sqrt{n}+1}$

La risposta corretta è la E

Se n è un quadrato perfetto, allora la base di tale quadrato è $\sqrt{n}$, il suo successivo è $\sqrt{n}+1$ da cui il quadrato perfetto successivo a $\left(\sqrt{n}\right)^2=n$ è $\left(\sqrt{n}+1\right)^2=n+2\sqrt{n}+1$.

13. Emanuele calcola il prodotto di tutti i divisori di un numero (compreso il numero stesso) e scrive il risultato su un foglio. Quale dei seguenti numeri non può aver scritto?

A) 1 B) 100 C) 101 D) 512 E) 1024

La risposta corretta è la D

Il numero che Emanuele non può aver scritto è 512. Infatti se un numero è divisibile per 2^n, allora è divisibile anche per 2^{n-1}, 2^{n-2}, …, 2^2, 2, 1, il cui prodotto è uguale a $2^n\cdot 2^{n-1}\cdot \ldots \cdot 2^2\cdot 2\cdot 1=2^{n+(n-1)+\cdots+2+1}=2^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Risulta $512=2^9$ e non esiste alcun n naturale tale che $\frac{n\cdot(n+1)}{2}=9$. Tutti gli altri numeri invece sono il prodotto dei divisori di un numero: 1 è il prodotto dei divisori di 1, 100 di 10, 101 di 101 e 1024 di 16.

14. Un numero primo ha esattamente 2 divisori: 1 e sé stesso. Michelangelo però deve trovare tutti i numeri tra 2 e 900 che hanno esattamente 3 divisori. Quanti sono?

A) 10 B) 0 C) 30 D) 29 E) 49

La risposta corretta è la A

Gli unici numeri ad avere esattamente 3 divisori sono i quadrati di numeri primi. Infatti, detto p un numero primo, il suo quadrato p^2 è divisibile solo per 1, per p e per p^2. D'altro canto, un numero che ammette come divisori due primi distinti p e q, con $p < q$, allora è divisibile anche per 1 e per pq, e quindi non può avere solo 3 divisori. I quadrati perfetti tra 2 e 900 che verificano la condizione richiesta sono pertanto i quadrati di 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, vale a dire 10 numeri.

15. In quanti modi Simona può suddividere 6 ragazze in 3 squadre da 2 persone? Si tenga presente che due suddivisioni sono identiche se e solo se ogni ragazza ha la stessa compagna di squadra.

A) 30 B) 60 C) 15 D) 20 E) 18

La risposta corretta è la C

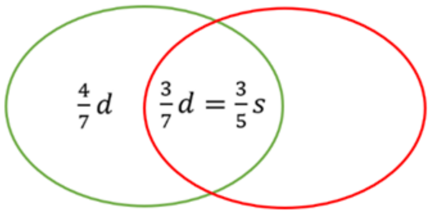
Il numero di modi di suddividere un insieme di 4 persone in due squadre da 2 è uguale al numero di modi in cui una delle quattro ragazze si può scegliere la compagna di squadra tra le rimanenti 3, cioè 3 modi. Se le persone sono 6, distinguiamo 5 casi (i 5 modi in cui fissata una delle 6 ragazze, essa può scegliersi la compagna) e in ciascuno di tali casi lei rimanenti 4 ragazze possono suddividersi in 3 modi in squadre da 2 per quanto detto in precedenza. Di conseguenza le diverse suddivisioni sono $5 \cdot 3 = 15$.

16. Al Winter Math Camp ci sono 72 iscritti ciascuno dei quali sa giocare a dama o a scacchi o ad entrambi; inoltre i $4/7$ di coloro che sanno giocare a dama non sanno giocare a scacchi, e i $3/5$ di coloro che sanno giocare a scacchi giocano anche a dama. Quanti sono gli iscritti che sanno giocare ad entrambi i giochi?

A) 32 B) 30 C) 24 D) 28 E) 20

La risposta corretta è la C

Sia d il numero di coloro che sanno giocare a dama ed s il numero di coloro che sanno giocare a scacchi. Dai dati si ha che $\frac{3}{7}d$ sanno giocare anche a scacchi mentre $\frac{3}{5}s$ sanno giocare a dama. Ma allora $\frac{3}{7}d = \frac{3}{5}s$ da cui $s = \frac{5}{7}d$. Dunque, poiché $\frac{4}{7}d + s = 72$, si ha $\frac{4}{7}d + \frac{5}{7}d = 72$ da cui $d = 56$ e quindi $\frac{3}{7}d = 24$.



17. Claudia ha 11 palline tutte diverse tra loro che sono colorate nel seguente modo: 4 palline rosse, 2 verdi e 5 blu. In quanti modi può scegliere una coppia (non ordinata) di palline di colore diverso?

A) 3 B) 38 C) 40 D) 45 E) 76

La risposta corretta è la B

Le coppie valide sono: rossa-verde, rossa-blu e verde-blu. Non dobbiamo contare anche le tre coppie verde-rossa, blu-rossa e blu-verde poiché così conteremmo le coppie ordinate. Dato che le palline sono tutte diverse, possiamo scegliere la pallina rossa in 4 modi, la verde in 2 e la blu in 5. Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio (o per la regola del prodotto cartesiano) il numero di coppie si trova facendo il prodotto delle cardinalità degli insiemi di partenza, ossia $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 5 = 20$ e $2 \cdot 5 = 10$. Queste tre quantità vanno sommate perché le tre situazioni sono indipendenti tra di loro e quindi la soluzione è $8 + 20 + 10 = 38$.

18. Su una lavagna sono scritti inizialmente tre numeri interi positivi distinti. Accanto ad essi Carlo scrive la somma di tutte le possibili coppie (non ordinate) fra due di questi numeri e poi scrive anche la somma dei tre numeri iniziali. Infine, somma tutti i numeri scritti sulla lavagna e ottiene 396. Quanto vale al massimo il più grande tra i tre numeri iniziali?

A) 96 B) 58 C) 52 D) 100 E) 80

La risposta corretta è la A

Siano $a < b < c$ i tre valori così che le quantità finali scritte sulla lavagna saranno: a, b, c, $a + b$, $a + c$, $b + c$, $a + b + c$; la somma di questi sette quantità è $4(a + b + c) = 396$ e quindi $a + b + c = 99$. Prendendo a e b interi positivi distinti più piccoli possibili, ossia 1 e 2, otteniamo il valore massimo di $c = 96$.