

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE

Olimpiadi della Matematica

Gara di Febbraio



21 febbraio 2024

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome: _____ Cognome: _____ Genere: ☐ F ☐ M

Data di nascita: _____ Taglia per eventuale maglietta: ☐ S ☐ M ☐ L ☐ XL

Scuola: _____ Anno di corso: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Città : _____

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. **NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE.** È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; **IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.**
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi. All'interno di ogni gruppo, i problemi appaiono in *approssimativo* ordine crescente di difficoltà.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E.** Una sola delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della mattina, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 14.30. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

(Non sono ammesse correzioni o cancellature)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15

16

17

Punteggio totale

(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi: <http://olimpiadi.dm.unibo.it>
ed il forum delle olimpiadi: <http://www.oliforum.it>

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Vittorio calcola la somma dei numeri da 1 a 2024, ma per sbaglio ne salta uno! Sapendo che ottiene un multiplo di 5, quale dei seguenti può essere il numero saltato?
(A) 1 (B) 100 (C) 222 (D) 2023 (E) 2024
2. Gli aventi diritto di voto sull'isola di Cavalfurfandia sono 5000; ciascuno è un cavaliere, nel qual caso rilascia solo dichiarazioni vere, o un furfante, nel qual caso rilascia solo dichiarazioni false. Tremila abitanti dichiarano che voteranno Carla, duemila che voteranno Flavia. Ciascuno dei tremila che hanno dichiarato di voler votare per Carla rilascia l'ulteriore dichiarazione: "Tutti quelli che dichiarano di votare per Flavia sono dei furfanti". Sapendo che ogni abitante vota per una delle due candidate, quanti voti di vantaggio sulla perdente avrà la vincitrice come minimo?
(A) 5000 (B) 4998 (C) 1002 (D) 1000 (E) Carla e Flavia potrebbero pareggiare.
3. Determinare il numero di coppie (m, n) di numeri interi di modulo minore di 10000 che risolvono l'equazione $n^2 + 2024n + 2024m = 2024$.
(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 18 (E) 19
4. Sia ABC un triangolo rettangolo in C di lati $BC = 3$ e $AB = 12$. Siano M il punto medio di AB , e D l'intersezione tra AC e la circonferenza circoscritta a BCM . Sia infine P il punto di intersezione tra BC e MD . Quanto misura il segmento PA ?
(A) $\frac{28}{5}\sqrt{15}$ (B) $6\sqrt{15}$ (C) 24 (D) $12\sqrt{15}$ (E) 48
5. Dato il polinomio $p(x) = x(x+1)(x-2)^2$, consideriamo il polinomio $q(x) = p(p(p(\dots(p(x))\dots)))$ dato dalla composizione di $p(x)$ con se stesso 2024 volte. Quanti sono gli interi k tali che si abbia $q(k) = 0$?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
6. Qual è la somma dei divisori positivi di 18000 la cui scrittura decimale termina per 50?
(A) 1400 (B) 1650 (C) 3150 (D) 3900 (E) 4030
7. Sono dati, nello spazio, tre punti distinti X, Y e Z ; ci si chiede se esista un punto P diverso da X, Y e Z tale che le rette PX, PY e PZ siano a due a due perpendicolari. Quattro amici fanno le seguenti affermazioni:
Alberto: "Esistono X, Y, Z e P appartenenti allo stesso piano che soddisfano tali condizioni."
Barbara: "Non esistono 4 punti X, Y, Z e P che soddisfano tali condizioni." Carlo: "Affinché P esista è necessario che XYZ sia acutangolo." Daria: "Affinché P esista è sufficiente che XYZ non sia ottusangolo."
Chi ha ragione?
(A) Solo Alberto (B) Solo Barbara (C) Solo Carlo (D) Solo Daria (E) Nessuna delle precedenti.
8. Sono dati tre numeri reali positivi a, b, c con $ac = 9$. Si sa che per tutti i numeri reali x, y con $xy \neq 0$ vale $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} \geq 0$. Qual è il massimo valore possibile per b ?
(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 9 (E) Non esiste nessun tale b .
9. Marina vuole colorare ciascuna casella di una tabella 5×5 in rosso o in blu, in modo che ogni casella condivida al più un lato con una casella dello stesso colore. Quante sono le colorazioni possibili della tabella?
(A) 30 (B) 45 (C) 46 (D) 50 (E) 90
10. Sia N il massimo numero ottenibile come prodotto di interi positivi tutti distinti la cui somma è 2024. Con quante cifre "0" termina la rappresentazione decimale di N ?
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 14

11. Alberto ha davanti a sé 13 caselle disposte una sopra l'altra, e vuole inserirvi i numeri da 1 a 10, uno per casella (tre caselle rimarranno vuote). Vuole inoltre che, se due numeri sono scritti in caselle che si toccano, quello più in alto sia maggiore. In quanti modi può farlo?
(A) 3^{10} (B) $2^{11} \cdot 3^3 \cdot 13$ (C) $2^{16} \cdot 13$ (D) 2^{20} (E) $2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
12. Un quadrilatero convesso $ABCD$ è tale che $AB = 14$, $BC = 24$, $CD = 26$ e $DA = 16$. La sua area è 360. Trovare l'area della regione di piano interna al quadrilatero costituita dai punti distanti al massimo 3 dal suo perimetro.
(A) 100 (B) 120 (C) $120 + 9\pi$ (D) 156 (E) 200

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Su un foglio di carta sono disegnati due esagoni regolari. Il più piccolo ha area 18, e una diagonale minore dell'esagono più grande coincide con una diagonale maggiore dell'esagono più piccolo. Quanto misura l'area dell'unione dei due esagoni?
14. Lucio ha una scatola con tanti dadi a 14 facce di forma e dimensioni uguali ma con numerazioni differenti. La forma dei dadi è un cubo tronco, cioè un cubo a cui si tagliano i vertici in modo da formare un poliedro con 14 facce, 6 ottagoni regolari e 8 triangoli equilateri. Ogni dado riporta tutti i numeri da 1 a 14 su facce diverse ma in modo tale che la somma dei numeri su facce opposte dello stesso dado sia sempre la stessa. Presi due dadi distinti però non esiste nessuna rotazione che porti il primo nel secondo. Quanti sono al massimo i dadi nella scatola di Lucio?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Diciamo che una coppia (a, b) di interi positivi è *bella* se a divide b e $a + 1$ divide $b + 1$.

- (a) Dimostrare che, fissato un intero positivo a , esistono infiniti interi positivi b tali che la coppia (a, b) sia bella.
- (b) Fissato un intero positivo a , determinare il minimo intero $b > a$ tale che (a, b) sia bella.
- (c) Preso ora $a = 18$, determinare il minimo intero positivo $b > a$ tale che (a, b) sia bella ed inoltre $a + 2$ divida $b + 2$.

SOLUZIONE:

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Siano ABC un triangolo acutangolo e D il piede della bisettrice uscente da A . Siano E ed F rispettivamente le intersezioni di AC con la circonferenza circoscritta ad ABD , e di AB con la circonferenza circoscritta ad ACD . Sia inoltre P l'intersezione tra BE e CF .

- (a) Mostrare che il triangolo PBC è isoscele.
- (b) Mostrare che $BD : BE = CD : CF$.
- (c) Sia F' il simmetrico di F rispetto al punto medio di BC . Mostrare che il triangolo EBF' è simile al triangolo ABC .

SOLUZIONE:

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Data una stringa di cifre 0 e 1, Giacomo vorrebbe dividerla in blocchi da 2 o 3 cifre consecutive in modo da soddisfare una delle seguenti due condizioni:

- (1) in ogni blocco, ogni (eventuale) cifra 0 compare a sinistra di ogni (eventuale) cifra 1. I blocchi consentiti sono cioè 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111;
- (2) in ogni blocco, ogni (eventuale) cifra 0 compare a destra di ogni (eventuale) cifra 1. I blocchi consentiti sono cioè 00, 10, 11, 000, 100, 110, 111.

Per esempio, per la stringa 011011 la suddivisione $01 \mid 10 \mid 11$ non va bene, perché i blocchi non sono né tutti del tipo (1), né tutti del tipo (2). La suddivisione $011 \mid 011$ invece va bene, perché tutti i blocchi sono del tipo (1).

- (a) Siano m, n interi maggiori o uguali a 0, con $m + n \geq 2$. Dimostrare che la stringa costituita da m cifre 0 seguite da n cifre 1 si può dividere in blocchi come affermato da Giacomo.
- (b) Sia $l \geq 4$ un intero. Dimostrare che il numero di stringhe di cifre 0 e 1 di lunghezza l per cui Giacomo **non** può effettuare una suddivisione come sopra è 2^{l-3} .

SOLUZIONE:

Questa gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, modificato e testato i problemi:

Giovanni Barbarino, Lorenzo Benedini, Giorgia Benassi, Sebastiano Boscardin, Lorenzo Cortesi, Davida Di Vora, Lorenzo Ferrari, Simone Fisichella, Massimiliano Foschi, Simone Foti, Nassimo Gasparini, Pietro Gualdi, Alessandro Iraci, Giovanni Italiano, Marcello Mamino, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Matteo Musumeci, Matteo Migliorini, Giovanni Paolini, Ludovico Pernazza, Matteo Protopapa, Daniel Rota, Luca Sartori, Marco Vergamini, Federico Viola.

Alessandra Caraceni, Davide Lombardo, Federica Bertolotti, Francesca Rizzo

SOLUZIONE DEI QUESITI

1. La risposta è **(B)**. Innanzitutto, notiamo che la somma dei numeri da 1 a 2024 è un multiplo di 5. Ciò si può osservare direttamente sapendo che la somma dei numeri da 1 a n è $\frac{n(n+1)}{2}$; alternativamente, si può notare che ciascuno dei seguenti numeri è multiplo di 5: $1 + 2024$, $2 + 2023$, ..., $1012 + 1013$, e quindi anche la somma di questi. Dato che la somma calcolata da Vittorio è un multiplo di 5, anche il numero mancante deve essere multiplo di 5. La risposta è quindi 100.
2. La risposta è **(C)**. Osserviamo che abbiamo due casi distinti a seconda che l'affermazione "Tutti quelli che dichiarano di votare per Flavia sono dei furfanti" sia vera o falsa:

- se l'affermazione è vera, allora tutti coloro che l'hanno rilasciata (che sono le 3000 persone che hanno dichiarato di votare Carla) sono dei cavalieri; pertanto, queste 3000 persone voteranno effettivamente Carla. D'altra parte, poiché l'affermazione è vera, sappiamo che tutti coloro che hanno dichiarato di votare Flavia sono dei furfanti, quindi mentivano durante tale dichiarazione e pertanto voteranno Carla. Quindi in questo caso tutti gli abitanti dell'isola voteranno per Carla, il risultato delle elezioni sarà 5000 a 0, e i voti di vantaggio per la vincitrice (Carla) saranno 5000.

- se l'affermazione è falsa, allora tutti coloro che l'hanno rilasciata (che sono le 3000 persone che hanno dichiarato di votare Carla) sono dei furfanti e, pertanto, voteranno Flavia.

Sia n (con $n \leq 2000$) il numero di cavalieri che ha dichiarato di votare Flavia (poiché in questo caso l'affermazione sopra riportata è falsa, si ha $n \geq 1$): tra queste 2000 persone, n voteranno Flavia (perché dicevano il vero mentre dichiaravano chi avrebbero votato) e $2000 - n$ voteranno per Carla (in quanto furfanti, mentivano mentre dichiaravano chi avrebbero votato). Otteniamo quindi che Carla riceve in tutto $2000 - n$ voti, mentre Flavia ne riceve $3000 + n$. In questo caso la vincitrice (Flavia) avrà

$$(3000 + n) - (2000 - n) = 1000 + 2n$$

voti di vantaggio. Poiché $1 \leq n \leq 2000$, si ha che i voti di vantaggio sono compresi tra 1002 e 5000.

Poiché il problema richiede il minimo numero di voti di vantaggio che avrà la vincitrice, la risposta è 1002.

3. La risposta è **(B)**. Innanzitutto notiamo che $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ deve dividere n^2 , quindi possiamo scrivere $n = (2^2 \cdot 11 \cdot 23) \cdot k = 1012k$, con k intero di modulo minore o uguale a 9, così che $|n| = |1012k| < 10000$. Sostituendo nell'equazione abbiamo

$$1012^2 k^2 + 2 \cdot 1012^2 k + 2024m = 2024,$$

e dividendo per 2024 si ha

$$506k^2 + 1012k - 1 = -m.$$

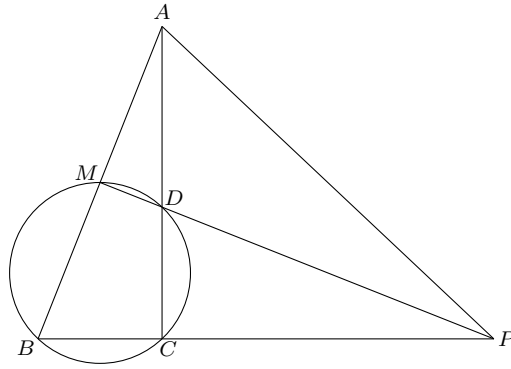
Il numero di soluzioni (n, m) è dunque pari al numero di interi $-10 < k < 10$ tali che

$$-10000 < 506k^2 + 1012k - 1 < 10000;$$

infatti, una volta scelto k , l'intero m è univocamente determinato. Si osserva facilmente che per $k \leq -6$ o $k \geq 4$ la disuguaglianza non è verificata, mentre lo è per tutti gli interi tra -5 e 3 , che sono 9.

4. La risposta è **(C)**. Poiché $BCDM$ è ciclico, si ha $\angle BMD = \angle BCD = 90^\circ$. I triangoli ABC e BMP sono dunque simili in quanto sono rettangoli e condividono l'angolo in B . Si ha quindi che $BM : BC = BP : BA$, cioè $6 : 3 = BP : 12$, da cui $BP = 24$ e $CP = 21$. Infine, anche il triangolo ACP è rettangolo, e applicando il teorema di Pitagora si ha $AP = \sqrt{CP^2 + CA^2} = \sqrt{441 + (AB^2 - BC^2)} = \sqrt{576} = 24$.

Seconda soluzione: Come nella prima soluzione, si ha $DM \perp AB$, quindi PM risulta essere l'asse del segmento AB . In particolare ABP è isoscele, quindi $AP = BP = 24$, come si è calcolato nella prima soluzione.



5. La risposta è **(C)**. Chiamiamo $q_k(x) = p(p(\dots(p(x))))$ il polinomio ottenuto componendo k volte il polinomio p con se stesso, così che $q(x) = q_{2024}(x)$. È chiaro che $q_k(x)$ è un polinomio a coefficienti interi. Poiché per $k > 1$ si ha $q_k(x) = p(q_{k-1}(x))$ e poiché le uniche soluzioni all'equazione $p(x) = 0$ sono date da $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$, si ha che $q_k(x) = 0$ se e solo se $q_{k-1}(x) \in \{0, -1, 2\}$. Osserviamo che l'equazione $p(x) = -1$ non ammette soluzioni intere, mentre $p(x) = 0$ (risp. $p(x) = 2$) ammette come unica soluzione $x = 0$ (risp. $x = 1$); quindi, per $k \geq 2$ si ha $q_{k-1}(x) = p(q_{k-2}(x)) \in \{0, 1, 2\}$ se e solo se $q_{k-2}(x) \in \{0, 1\}$. Infine, poiché $p(x) = 1$ non ammette soluzioni intere, abbiamo che per $k > 3$ l'equazione $q_{k-2}(x) = p(q_{k-3}(x)) = 1$ non ha soluzioni e quindi $q_{k-1}(x) = p(q_{k-2}(x)) \in \{0, 1, 2\}$ se e solo se $q_{k-2}(x) = 0$.

Riassumendo quanto precede, per $k > 3$, si ha che $q_k(x) = 0$ è verificata se e solo se $q_{k-2}(x) = 0$. Concatenando abbastanza volte questa implicazione, si ottiene che $q(x) = q_{2024}(x) = 0$ se e solo se $q_2(x) = p(p(x)) = 0$, che si verifica facilmente avere come soluzioni $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

6. La risposta è **(D)**. Si ha che $18000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, quindi tutti i divisori di 18000 sono del tipo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, dove $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $c \in \{0, 1, 2\}$. Affinché la scrittura decimale del divisore termini con 50, il numero deve essere divisibile per 50, da cui $a \geq 1$ e $c \geq 2$. Notiamo, inoltre, che se $a \geq 2$ e $c \geq 2$, allora la scrittura decimale del divisore termina con le cifre "00". È quindi necessario richiedere anche $a = 1$. Quindi la somma richiesta è data da

$$\sum_{b=0}^3 \sum_{c=2}^3 2 \cdot 3^b \cdot 5^c = 2 \cdot \left(\sum_{b=0}^3 3^b \right) \cdot \left(\sum_{c=2}^3 5^c \right) = 2 \cdot 13 \cdot 150 = 3900.$$

7. La risposta è **(C)**. L'unico che ha ragione è Carlo.

Alberto ha torto, infatti se esistessero X, Y, Z, P appartenenti allo stesso piano tali che PX, PY e PZ sono a due a due perpendicolari allora $PZ \perp PX$, $PZ \perp PY$ e quindi $PY \parallel PX$, che è assurdo.

Barbara ha torto: 4 punti siffatti sono ad esempio dati dagli estremi di 3 spigoli di un cubo aventi un vertice in comune (che sarà P), o più in generale dai vertici di un qualsiasi tetraedro rettangolo.

Carlo ha ragione: infatti dato che $XY^2 = PX^2 + PY^2 < PX^2 + PY^2 + 2 \cdot PZ^2 = XZ^2 + YZ^2$, allora $\widehat{XZY}$ è acuto, e analogamente anche $\widehat{ZXY}$ e $\widehat{XYZ}$ sono acuti. Un'argomentazione alternativa per mostrare che Carlo ha ragione è la seguente: consideriamo la sfera di diametro XY , allora P appartiene a tale sfera e la retta PZ è la perpendicolare al piano su cui giacciono P, X, Y , dunque ogni punto di tale retta (fatta eccezione per P) è esterno alla sfera. Ma allora $\widehat{XZY}$ è acuto (e analogamente anche $\widehat{ZXY}$ e $\widehat{XYZ}$ sono acuti).

Daria ha torto: per quanto detto sopra, è necessario che XYZ sia acutangolo, quindi XYZ non può essere rettangolo; in particolare, non è sufficiente che XYZ non sia ottusangolo.

8. La risposta è **(C)**. Per ipotesi, per x, y tali che $xy \neq 0$, si ha

$$\frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2y^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} \geq 0.$$

Dimostriamo che tale disuguaglianza è sempre soddisfatta per $b \leq 6$: infatti, se $xy > 0$, allora la disuguaglianza è chiaramente verificata. D'altra parte, se $xy < 0$, allora, usando l'uguaglianza $ac = 9$, si ottiene

$$\frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2y^2} = \frac{(\sqrt{ay} + \sqrt{cx})^2 + xy(b - 2\sqrt{ac})}{x^2y^2} = \frac{(\sqrt{ay} + \sqrt{cx})^2 + xy(b - 6)}{x^2y^2},$$

che è chiaramente non negativa per $b \leq 6$.

Inoltre, 6 è il massimo valore di b per cui tale disuguaglianza è verificata per ogni x, y con $xy \neq 0$: infatti, se $b > 6$, allora per $y = \sqrt{c}$, $x = -\sqrt{a}$ si ha che

$$\frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2y^2} = \frac{-\sqrt{ac}(b - 2\sqrt{ac})}{ac} = \frac{-3(b - 6)}{9} \leq 0,$$

contro le ipotesi del problema.

Seconda soluzione: Moltiplicando la disuguaglianza del testo per il numero positivo y^2 si ottiene

$$a\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b\left(\frac{y}{x}\right) + c \geq 0$$

per ogni coppia di numeri reali x, y entrambi non nulli. In particolare, visto che il rapporto $t := y/x$ può assumere ogni valore reale diverso da 0, si ha $at^2 + bt + c \geq 0$ per ogni t in $\mathbb{R}$ (compreso $t = 0$: infatti per $t = 0$ si ottiene c , che è positivo per ipotesi). È ben noto che un polinomio di secondo grado è positivo per ogni valore della variabile se e solo se sono verificate le seguenti due condizioni: il coefficiente del termine di grado due è positivo (e questo è verificato nel nostro caso, dato che $a > 0$ per ipotesi) e il discriminante $b^2 - 4ac$ è minore o uguale a 0. Nella nostra situazione, questa seconda condizione si traduce in $b^2 - 4ac \leq 0$, cioè $b^2 \leq 4ac = 36$, ovvero infine $b \leq 6$. Il valore massimo possibile per b è quindi 6.

9. La risposta è **(A)**. Innanzitutto, osserviamo che una volta colorata una riga e una colonna della tabella rispettando le condizioni date, allora esiste al più un modo di completare la colorazione rispettando le condizioni del problema: infatti, data una tabella 2×2 con tre caselle colorate usando entrambi i colori, c'è un unico modo di colorare la quarta casella mantenendo le condizioni rispettate (questo si vede elencando i pochi casi possibili). Si osservi inoltre che una tabella 2×2 con tre caselle colorate dello stesso colore contraddice le condizioni del problema.

Quindi, data una colorazione su una riga e una colonna della nostra tabella 5×5 , l'unico modo di espandere questa colorazione su tutta la tabella si ottiene restringendosi a guardare (di volta in volta) le sottotabelle 2×2 di cui 3 caselle sono già colorate (necessariamente usando entrambi i colori) e colorando la quarta casella rimanente.

Osserviamo che una volta colorata la prima riga in modo tale che non ci siano tre caselle consecutive dello stesso colore, ma che ci siano almeno due caselle adiacenti con lo stesso colore (il che si può fare in 14 modi possibili), esiste un unico modo di espandere la colorazione all'intera tabella: infatti, se ci sono due caselle blu vicine, le due immediatamente sottostanti devono essere rosse, quelle ulteriormente sotto devono essere blu e così via; quindi la colorazione di almeno una colonna è determinata e, per quanto detto sopra, esiste al più una colorazione dell'intera tabella che espande quella iniziale. Inoltre, la colorazione ottenuta ripetendo la colorazione della prima riga sulla terza e la quinta riga, e mettendo la colorazione opposta sulla seconda e sulla quarta riga, è una colorazione ammissibile. Si osservi che in questo caso la colorazione della prima colonna si ottiene alternando i colori. Esistono quindi 14 colorazioni di questo tipo.

In maniera del tutto analoga, una colorazione della prima colonna con almeno due caselle adiacenti dello stesso colore (che si può sempre fare in 14 modi distinti) determina una colorazione dell'intera tabella. In questo caso avremo che la prima riga avrà i colori alternati e quindi non potrà coincidere con nessuna delle colorazioni contate sopra.

Anche nel caso in cui sia la prima riga, sia la prima colonna sono colorate a colori alterni, esiste un'unica colorazione possibile per tutta la tabella, data dalla colorazione a scacchiera. Esistono pertanto 2 colorazioni che rientrano in questo caso.

Poiché abbiamo esaurito tutte le possibili colorazioni della prima riga e della prima colonna, si ha che non esistono altre colorazioni oltre a quelle elencate e quindi il numero totale di colorazioni è $14 + 14 + 2 = 30$.

10. La risposta è **(D)**. Chiamo A l'insieme dei numeri che sommano a 2024 e il cui prodotto è dato dal massimo possibile, cioè N . Chiamo "buco" un numero n che non è in A , ma tale che A contiene sia un numero maggiore di n , sia un numero minore di n .

Dimostro che A non contiene 1: sia M il massimo intero contenuto in A ; se A contenesse 1, allora l'insieme B ottenuto da A togliendo 1 e aggiungendo $M + 1$ rispetterebbe comunque tutte le condizioni imposte dal problema, ma il prodotto dei numeri contenuti in esso sarebbe $N \cdot (M + 1) > N$, contraddicendo il fatto che N fosse il massimo possibile.

Dimostro per assurdo che A ha al più un buco: supponiamo che $a < b$, con $a, b \in A$ e tali che $a + 1$ e $b - 1$ sono due buchi distinti; dato che $(a + 1)(b - 1) > ab$, l'insieme C ottenuto da A rimuovendo a, b e aggiungendo $a + 1$ e $b - 1$ rispetta comunque tutte le ipotesi del problema. Inoltre, il prodotto dei numeri contenuti in C sarebbe dato da $N \frac{(a+1)(b-1)}{ab} > N$, contraddicendo la massimalità di N .

Inoltre, A non può non contenere 2 e allo stesso tempo avere un buco n tale che $n + 2 \in A$. Infatti, se così fosse, l'insieme D , ottenuto da A aggiungendo 2 e n e rimuovendo $n + 2$, rispetta sempre le ipotesi del problema. Ancora una volta, il prodotto dei numeri contenuti in D è dato da $N \frac{2n}{n+2} > N$, il che comporta che N non fosse il massimo possibile.

L'unico modo per scrivere 2024 come somma di numeri distinti rispettando le condizioni precedenti è usando i numeri da 2 a 64, saltando 55. Segue che $N = \frac{64!}{55!}$, che termina con 13 cifre '0'. Per contare il numero di cifre 0 finali è sufficiente contare il numero di fattori 2 e di fattori 5 che appaiono nella fattorizzazione di N , e poi prendere il minimo di queste due quantità. È facile verificare che ci sono meno fattori 5 che non fattori 2; infine, per calcolare il numero di fattori 5, si può osservare che questi sono gli stessi del prodotto $5 \cdot 10 \cdot 15 \cdots 50 \cdot 60$: tale prodotto ha $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 13$ fattori 5 (infatti ogni multiplo di 5 fra 5 e 60 contiene un solo fattore 5, tranne 25 e 50 che ne contengono 2).

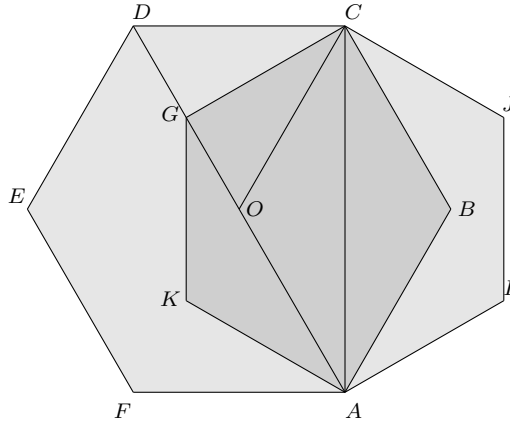
11. La risposta è **(D)**. Le quattro caselle lasciate bianche partizionano i 10 numeri in quattro sottoinsiemi (eventualmente vuoti). All'interno di ciascuno di questi sottoinsiemi, l'ordine dei numeri inseriti nelle caselle è determinato. Poiché ciascuno dei 10 numeri può finire in uno qualsiasi dei quattro insiemi, l'insieme delle disposizioni possibili è $4^{10} = 2^{20}$.

12. La risposta è **(E)**. La soluzione del problema si basa su due considerazioni chiave. Innanzitutto, notando che $AB + CD = BC + DA = 40$, si deduce che il quadrilatero $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza. In particolare, detto r il raggio di tale circonferenza, vale $r = \frac{360}{40} = 9$.

Sia ora I il centro della circonferenza. Applicando un'omotetia in I con fattore $\frac{2}{3}$, il quadrilatero viene mandato in $A'B'C'D'$, che è circoscritto a una circonferenza di centro I e raggio 6. Notiamo quindi che i lati di $A'B'C'D'$ distano esattamente 3 da quelli di $ABCD$, quindi un punto interno ad $ABCD$ dista al più 3 dal perimetro se e solo se non sta dentro a $A'B'C'D'$.

Per concludere, $A'B'C'D'$ ha area $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 360 = 160$, quindi la risposta è $360 - 160 = 200$.

13. La risposta è 29. La figura disegnata sul foglio si può rappresentare come segue:



Il punto O in figura è dato dal centro dell'esagono maggiore $ABCDEF$. Poiché l'esagono $ABCDEF$ è regolare, il triangolo OCD è equilatero. Inoltre, essendo DA il diametro della circonferenza circoscritta a $ABCDEF$, il triangolo ACD è rettangolo, con angolo retto in C e $ADC = 60^\circ$. In particolare, detto ℓ la lunghezza del lato DC dell'esagono, si ha che $AD = 2\ell$. Per il teorema di Pitagora, si ha $AC = \sqrt{3}\ell$; segue che il rapporto tra la diagonale maggiore dell'esagono minore $AKGCJI$ e la diagonale maggiore dell'esagono $ABCDEF$ è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, pertanto, il rapporto delle rispettive aree è $\frac{3}{4}$, da cui

$$\text{Area}(ABCDEF) = \frac{4}{3}\text{Area}(AKGCJI) = \frac{4}{3}18 = 24$$

Il trapezio $AIJC$ è metà dell'esagono $AKGCJI$, da cui

$$\text{Area}(AIJC) = \frac{1}{2}\text{Area}(AKGCJI) = \frac{1}{2}18 = 9.$$

Il quadrilatero $OCBA$ è un terzo dell'esagono $ABCDEF$ (infatti esso è unione dei due triangoli equilateri OAB e OBC , entrambi corrispondenti a $\frac{1}{6}$ dell'esagono); otteniamo

$$\text{Area}(OCBA) = \frac{1}{3}\text{Area}(ABCDEF) = \frac{1}{3}24 = 8.$$

Si osservi che i triangoli OAC e BAC sono congruenti: infatti $\angle CBA = 120^\circ = \angle COA$, essi hanno CA com lato in comune e sono entrambi isosceli; da cui

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}\text{Area}(OCBA) = \frac{1}{2}8 = 4.$$

Segue direttamente che l'area del pentagono $ACDEF$ è data da

$$\text{Area}(ACDEF) = \text{Area}(ABCDEF) - \text{Area}(ABC) = 24 - 4 = 20.$$

Infine, l'area dell'unione dei due esagoni è data dalla somma delle aree del pentagono $ACDEF$ e del trapezio $AIJC$, cioè

$$\text{Area}(AIJCDEF) = \text{Area}(AIJC) + \text{Area}(ACDEF) = 9 + 20 = 29.$$

14. La risposta è 26880. È immediato notare che la somma delle facce opposte deve essere necessariamente 15. Partizioniamo quindi i numeri da 1 a 14 nelle coppie $\{1,14\}, \{2,13\}, \dots, \{7,8\}$, in modo che la somma in ogni coppia sia 15: ogni coppia di numeri deve essere assegnata a una coppia di facce opposte.

Mettiamo un dado sul tavolo, appoggiato su una faccia ottagonale, in modo tale che davanti a noi ci sia un'altra faccia ottagonale. Chiamiamo *configurazione* un modo di scrivere i numeri su questo dado in modo tale che la somma delle facce opposte sia 15; diciamo che due configurazioni sono *uguali* se su ogni faccia abbiamo scritto lo stesso numero. Ci sono un totale di $2^7 \cdot 7!$ configurazioni: dobbiamo infatti assegnare a ciascuna coppia di facce opposte una diversa coppia

di numeri la cui somma fa 15, il che si può fare in $7!$ modi. Successivamente abbiamo due modi di scrivere ciascuna coppia di numeri sulla coppia di facce opposte associata (possiamo scrivere il numero più piccolo su una certa faccia e quello più grande sull'altra, o viceversa).

Sia n il numero di dadi posseduti da Lucio. Preso un dado di Lucio, abbiamo 24 modi diversi di appoggiarlo sul tavolo su una faccia ottagonale in modo che davanti a noi ci sia una faccia ottagonale: dobbiamo infatti scegliere in 6 modi su che faccia appoggiarlo, e in 4 modi quale delle 4 facce ottagonali adiacenti rivolgere verso di noi. Ogni modo di appoggiarlo ci dà quindi 24 diverse configurazioni; inoltre, le configurazioni ottenute da due diversi dadi di Lucio sono sempre diverse, perché altrimenti troveremmo una rotazione che porta il primo dado nel secondo.

Questo ci dice che $n \leq \frac{2^7 \cdot 7!}{24} = 26880$. Supponiamo che n sia il massimo possibile: se per assurdo $n < 26880$, allora esisterebbe almeno una configurazione che non è ottenibile a partire da nessun dado di Lucio. Se noi aggiungessimo alla scatola il dado con quella configurazione, le condizioni sarebbero ancora soddisfatte, e quindi n non era il massimo possibile, assurdo. Quindi la risposta è $n = 26880$.

15. Per definizione, una coppia di interi positivi (a, b) è bella se esistono k, h interi positivi tali che $b = ka$ e $b + 1 = h(a + 1)$. In particolare, si ha $ka + 1 = h(a + 1)$ e quindi

$$h = \frac{ka + 1}{a + 1}.$$

Poiché h è intero, si ha che $ka + 1 = k(a + 1) - (k - 1)$ è divisibile per $a + 1$, da cui $k - 1$ è divisibile per $a + 1$ e quindi esiste n intero non negativo tale per cui $k - 1 = n(a + 1)$. Mettendo tutto insieme, otteniamo che se la coppia (a, b) è bella allora esiste un intero n per cui $b = ka = a(na + n + 1)$.

D'altra parte, se $b = a(na + n + 1)$ per qualche intero non negativo n , allora, chiaramente, a divide b e $b + 1 = (na + n + 1)a + 1 = n(a + 1)a + (a + 1)$ è divisibile per $a + 1$.

Riassumendo, la coppia (a, b) è bella se e solo se $b = a(na + n + 1)$ per qualche intero positivo n .

- (a) Dato a , esistono infiniti interi positivi b per cui la coppia (a, b) è bella: infatti, segue da quanto detto sopra che per ogni intero positivo n la coppia $(a, a(na + n + 1))$ è bella.

Seconda soluzione: per ogni d intero positivo dispari, la coppia del tipo (a, a^d) è bella: chiaramente a divide a^d ; inoltre $a^d + 1 = (a + 1)(1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{d-1})$ è divisibile per $a + 1$. Abbiamo così ottenuto un'altra famiglia infinita di coppie belle (a, b) con a dato.

- (b) Si osservi che, se $m > n$, allora $a(ma + m + 1) > a(na + n + 1)$. Poiché le coppie belle sono tutte e sole del tipo $(a, a(na + n + 1))$ (per n intero non negativo) e poiché per $n = 0$ si ha $a(na + n + 1) = a$, il minimo intero $b > a$ per cui (a, b) è bella si ottiene per $n = 1$, cioè $b = a^2 + 2a > a$.

Seconda soluzione: Dato a , il minimo b (tale per cui $b > a$ e (a, b) è una coppia bella) è un multiplo di a del tipo ma ($m > 1$ intero). Osservo che se $ma + 1$ da come resto r nella divisione per $a + 1$, allora $(m + 1)a + 1 = (ma + 1) + (a + 1) - 1$ da come resto $r - 1$. Poiché per $m = 1$ il resto della divisione di $ma + 1$ per $a + 1$ è nullo, il multiplo successivo di a ad avere tale proprietà sarà dato quando $m = a + 2$, cioè $b = (a + 2)a$.

- (c) Da quanto detto sopra, sappiamo che la coppia $(18, b)$ è bella se e solo se $b = 18(18n + n + 1) = 18(19n + 1)$. La condizione

$$20 = a + 2 \mid b + 2 = 342n + 20,$$

è soddisfatta se e solo se 20 divide $342n$ o, equivalentemente, se 10 divide n . Deduciamo così che il minimo $b = 18(19n + 1)$ maggiore di 18 per cui la coppia $(18, b)$ è bella e $b + 2$ divide $a + 2 = 20$ si ottiene per $n = 10$, ovvero $b = 191 \cdot 18 = 3438$.

16. (a) Poiché $DBAE$ e $CDF A$ sono inscritibili, si ha $\angle BCP = \angle DCF = \angle DAF = \angle DAB$ e $\angle CBP = \angle DBE = \angle DAE = \angle DAC$. Essendo AD la bisettrice di $\angle BAC$, si ha $\angle BAD = \angle DAC$, quindi $\angle BCP = \angle CBP$, il che dimostra che il triangolo BCP è isoscele.

- (b) Essendo $DBAE$ e $C DFA$ iscrivibili, si ha $\angle DFC = \angle DAC = \angle DAB = \angle DEB$. Inoltre, dal punto precedente, sappiamo che $\angle EBD = \angle DCF$. Poiché i triangoli EBD e FCD hanno 2 coppie di angoli uguali, essi sono simili. Pertanto $BD : BE = CD : CF$.
- (c) Il quadrilatero $CFBF'$ ha, per ipotesi, le diagonali che si bisecano, pertanto è un parallelogramma. Si osservi che $\angle EBF'$ è congruente a $\angle CAB$. Infatti, poiché $CFBF'$ è un parallelogramma, sappiamo che $\angle CBF' = \angle BCF = \angle DAF$ (dove l'ultima uguaglianza segue dai punti precedenti) e $\angle CBE = \angle DAE$ (sempre per i punti precedenti). Da cui

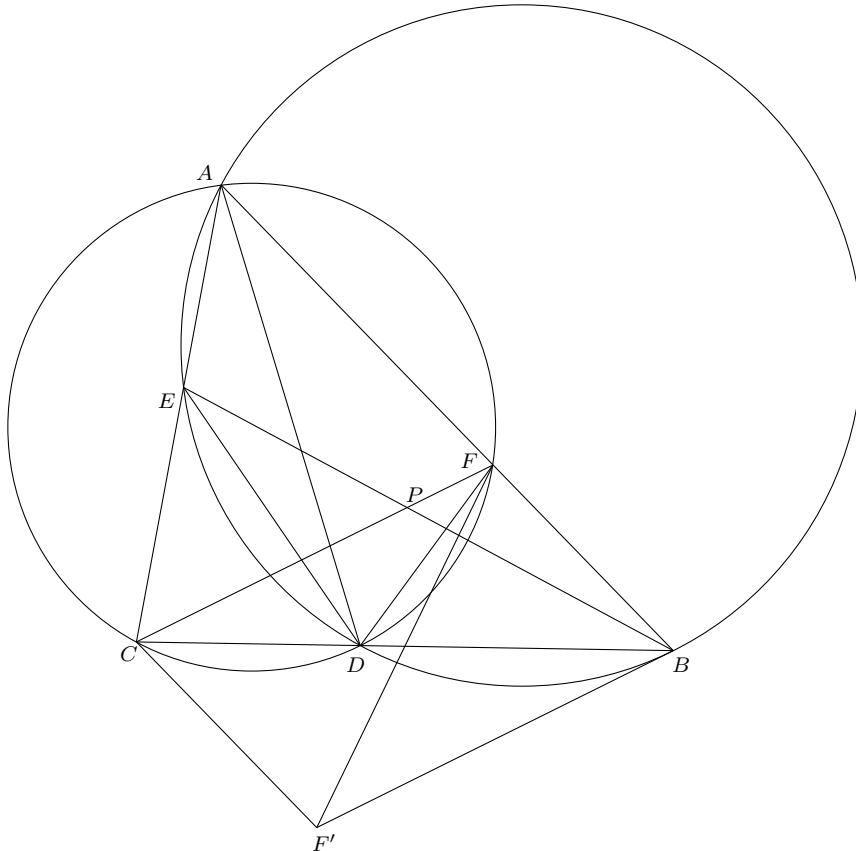
$$\angle EBF' = \angle CBE + \angle CBF' = \angle DAE + \angle DAB = \angle CAB .$$

Si osservi ora che

$$\angle ECF' = \angle ECB + \angle BCF' = \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - \angle EBF' ,$$

dove l'uguaglianza $\angle BCF' = \angle CBA$ è dovuta al fatto che il quadrilatero $CFBF'$ è un parallelogramma. Ne segue che gli angoli $\angle ECF'$ e $\angle EBF'$ sono supplementari e il quadrilatero $EBF'C$ è inscritto in una circonferenza. Deduciamo quindi che $\angle ECB = \angle EF'B$. Abbiamo così dimostrato che i triangoli $EF'B$ e ACB hanno due coppie di angoli uguali e sono pertanto simili.

In alternativa, possiamo osservare che $BF' = CF$ perché lati opposti del parallelogramma $BF'CF$, da cui grazie al punto (b) si ottiene $BF' : BE = CD : BD$. Ora, grazie al teorema della bisettrice, $CD : BD = AB : AC$, dunque i triangoli BEF' e ABC sono simili grazie al secondo criterio di similitudine.



17. (a) Notiamo che, comunque si suddivida la stringa, i blocchi saranno tutti del primo tipo: infatti, nella stringa data tutti gli 1 sono a destra di tutti gli 0. Inoltre, esiste almeno una suddivisione della stringa in blocchi da 2 o da 3 cifre: se $m+n$ è pari, possiamo suddividere la stringa in blocchi tutti da 2; se è dispari, la possiamo suddividere in un blocco da 3 e ciò che resta in blocchi da 2.
- (b) Innanzitutto dimostriamo che se una stringa inizia con la cifra 1 e termina con un numero di cifre 0 diverso da uno (cioè, le ultime due cifre non sono 10), allora esiste una suddivisione

ammissibile della stringa: consideriamo una stringa di questo tipo e suddividiamola in sottostringhe della forma $0 \dots 01 \dots 1$ (dove in ciascuna appaiono un numero positivo di cifre 0 e di cifre 1), più eventualmente una sottostringa finale di sole cifre 0 (se ci sono tali zeri finali, allora ce ne sono almeno due, per ipotesi sulla stringa).

Visto che tutte queste sottostringhe, eccetto eventualmente l'ultima, contengono sia 0 che 1, hanno in particolare almeno due cifre. D'altra parte, l'eventuale ultima stringa contenente solo cifre 0 avrà, per ipotesi, almeno due cifre. Per il punto a), ognuna di queste sottostringhe con almeno 2 cifre può essere suddivisa in blocchi del primo tipo.

Abbiamo quindi dimostrato che sappiamo suddividere in blocchi del primo tipo tutte le stringhe che iniziano per 1 e non terminano per 10. Si dimostra in modo analogo che si possono suddividere le stringhe che iniziano per 0 e che non terminano per 01.

Consideriamo ora una stringa s che inizia per 0 e finisce per 10. Se la leggiamo da destra a sinistra, otteniamo una nuova stringa s' che inizia per 01 e finisce per 0. Se s non inizia per 01, allora s' non finisce per 10, e per lo stesso ragionamento di prima possiamo decomporre s' in blocchi del primo tipo. Leggendo la decomposizione al contrario otteniamo una decomposizione in blocchi del secondo tipo per s .

Quindi le uniche stringhe che non sappiamo ancora come decomporre in blocchi sono quelle che iniziano per 01 e terminano per 10 (e quelle che iniziano per 10 e che terminano per 01). Tuttavia, in questo caso il primo blocco di una eventuale decomposizione sarebbe necessariamente del primo tipo, mentre l'ultimo sarebbe necessariamente del secondo tipo, il che vuol dire che una suddivisione come richiesta da Giacomo non esiste.

Le stringhe di lunghezza l che iniziano per 0 per cui non esiste una decomposizione ammissibile sono quindi quelle che iniziano per 01 e finiscono per 10, e sono quindi 2^{l-4} . Per simmetria, le stringhe di lunghezza l che iniziano per 1 per cui non esiste una suddivisione ammissibile sono altrettante, e quindi in totale otteniamo 2^{l-3} stringhe che non ammettono una suddivisione valida.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Si assegnino **5 punti** a chi risolve il punto a). Di questi, si assegnino **3 punti** a chiunque mostri una famiglia infinita di coppie (a, b) belle, qualunque sia il valore fissato di a , e **2 punti** a chi effettivamente dimostra che la famiglia esibita consiste di coppie belle (per esempio, se la dimostrazione viene svolta come nella prima dimostrazione ufficiale, si assegnino **3 punti** a chi afferma che le coppie $(a, a(na + n + 1))$ (al variare di n intero) danno luogo a una famiglia infinita di coppie belle, e **2 punti** a chi effettivamente dimostra che tali coppie sono belle).
- Si assegnino **6 punti** a chi risolve il punto b). Di questi, si assegnino **4 punti** a chi dimostra che le coppie belle sono tutte della forma descritta sopra, **1 punto** a chi nota che la funzione $n \mapsto a(na + n + 1)$ è crescente, e **1 punto** a chi conclude.

Per chi invece segue la seconda soluzione ufficiale, si assegnino **3 punti** a chi osserva che il resto della divisione per $a + 1$ di due multipli successivi di a differisce di 1 (o a chi fa osservazioni analoghe con le classi di resto modulo $a + 1$). Si assegnino altri **3 punti** a chi usa questo fatto per concludere.

- Si assegnino **4 punti** a chi risolve il punto c). Di questi, si assegni **1 punto** a chi sostituisce la condizione nella formula sopra, ottenendo $20 \mid 18 \cdot 19n + 20$; **1 punto** a chi nota che è equivalente a richiedere che $10 \mid 19n$, e **2 punti** a chi conclude che il minimo per cui la condizione sia soddisfatta è $n = 10$.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **3 punti**. Si assegnino **2 punti** per chi osservi l'uguaglianza $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$ o l'uguaglianza $\widehat{FAD} = \widehat{FCD}$, ma non entrambe.
- Il punto (b) vale **4 punti**. Si assegnino **2 punti** per chi osservi almeno una fra le uguaglianze $\widehat{BED} = \widehat{BAD}$ e $\widehat{DFC} = \widehat{DAC}$. Ulteriori **2 punti** si assegnino per la deduzione che BED e CFD sono simili, da cui la relazione cercata.
- Il punto (c) vale **8 punti**, così suddivisi: si assegnino **3 punti** per la dimostrazione che $\widehat{EBF'} = \widehat{BAC}$; si assegnino **4 punti** per il calcolo di un secondo angolo del triangolo BEF' o per la dimostrazione che $BE : BF' = AB : AC$; infine, si assegni **1 punto** per la conclusione tramite il primo o il secondo criterio di similitudine.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per soluzioni incomplete che seguano all'incirca la traccia della soluzione ufficiale, si assegnino punti parziali secondo il seguente schema:

- Il punto (a) vale **4 punti**. Si assegnino questi punti a chiunque mostri che è possibile suddividere la stringa in blocchi da 2 e da 3 cifre (precisando o anche non precisando l'ordine in cui appaiono i blocchi da 2 e da 3) e che dimostri che (per l'ordine precisato, o per qualunque ordine, se non ne è stato precisato nessuno) i blocchi utilizzati sono tutti dello stesso tipo.
- Il punto (b) vale **11 punti**. Di questi, si assegnino punti per le seguenti osservazioni:
 - **1 punto** a chi osserva che per simmetria del problema si può supporre che la prima (o l'ultima) cifra sia fissata.

- **3 punti** a chi suddivide la stringa in sottostringhe come nel punto a), più eventualmente un blocco con tutte le cifre uguali.
- **1 punti** per chi conclude che si riescono a suddividere tutte le stringhe per le quali l'ultimo blocco non contiene una singola cifra.
- **2 punti** per chi fa lo stesso ragionamento “specchiando”, deducendo che si possono suddividere tutte le stringhe che non iniziano per 01 e terminano per 10 (o viceversa, nel caso stiano considerando stringhe che iniziano/terminano per 1).
- **3 punti** per chi dimostra che non esiste un modo di suddividere le stringhe che iniziano per 01 e terminano per 10.
- **1 punto** per chi conclude, calcolando il numero di stringhe che non si possono suddividere.