XL Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico, 3 maggio 2024

1. Jack scrive sulla lavagna il numero $x_0 = 2024^{2024}$.

   Successivamente lo cancella e scrive al suo posto $x_1 = |x_0 - \pi|$. Poi cancella x_1 e scrive al suo posto $x_2 = |x_1 - \pi|$, e così via. In altri termini, ad ogni mossa Jack cancella il numero x_n scritto precedentemente e lo sostituisce con $x_{n+1} = |x_n - \pi|$.

   Dimostrare che esiste un valore di n tale che $x_{n+2} = x_n$.

2. Sia dato un quadrato di lato unitario nel piano. Un punto M del piano di dice *mediano* se esistono due punti P e Q, appartenenti al bordo del quadrato, tali che

   - il segmento PQ ha lunghezza unitaria,
   - M è il punto medio di PQ.

   Determinare l'insieme costituito da tutti e soli i punti mediani.

3. Un intero n si definisce *egiziano* se esiste una sequenza di interi positivi strettamente crescente $0 < a_1 < a_2 < ... < a_k = n$ (quindi l'ultimo termine della sequenza è n) tale che
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

   (a) Determinare se il numero $n = 72$ è egiziano.

   (b) Determinare se il numero $n = 71$ è egiziano.

   (c) Determinare se il numero $n = 72^{71}$ è egiziano.

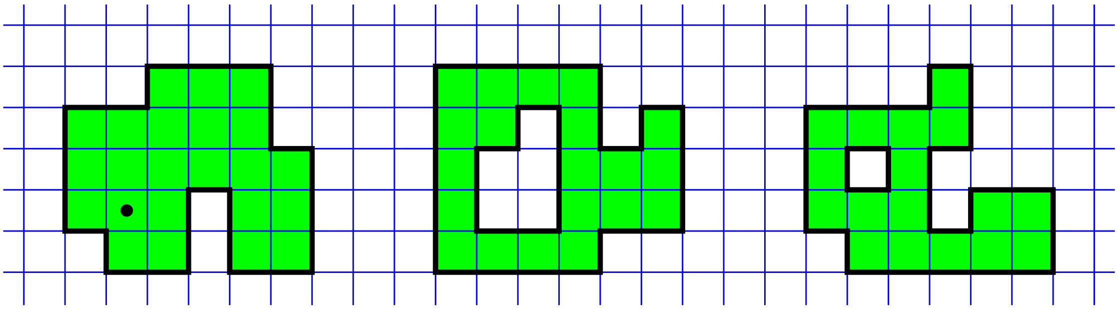
4. Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB < BC$, inscritto in una circonferenza Γ. Siano P sull'arco BC (non contenente A) e Q sull'arco CD (non contenente A) tali che $BP = CQ$.

   La circonferenza di diametro AQ interseca nuovamente la retta AP in S. La retta per B e perpendicolare ad AQ interseca la retta AP in X.

   (a) Dimostrare che $XS = PS$.

   (b) Dimostrare che $AX = DQ$.

5. Una fortezza è un insieme finito di caselle in una griglia quadrata infinita, con la proprietà che da ogni casella si può raggiungere ogni altra casella muovendosi sempre tra caselle con un lato in comune. I muri della fortezza sono i segmenti unitari della griglia che separano un quadrato della fortezza da un quadrato non appartenente alla fortezza. L'area A di una fortezza è il numero di quadrati che la compongono. Il perimetro P di una fortezza è la lunghezza totale dei suoi muri. Nella figura sottostante sono rappresentate tre possibili fortezze, con i relativi valori di area e perimetro.



$A = 23,\ P = 26$ $\quad$ $A = 20,\ P = 34$ $\quad$ $A = 17,\ P = 30$

Alcune caselle della fortezza possono contenere una guardia, che sorveglia tutte le caselle che si trovano sopra, sotto, a destra o a sinistra della sua posizione, senza muri in mezzo (ogni guardia sorveglia anche la casella in cui si trova). Ad esempio, una guardia posta nella casella con il puntino della prima fortezza sorveglia sei caselle, compresa quella in cui si trova.

(a) Determinare il più piccolo k per cui k guardie sono sufficienti per sorvegliare ogni possibile fortezza con perimetro $P \leq 2024$.

(b) Determinare il più piccolo k per cui k guardie sono sufficienti per sorvegliare ogni possibile fortezza con area $A \leq 2024$.

6. Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo numero reale M_n tale che

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq M_n$$

per ogni n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri *interi* tali che $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Problema 1 – Soluzione.

Osserviamo che, se il numero x_n scritto sulla lavagna dopo n mosse è maggiore o uguale a π, allora al passo successivo Jack scrive $x_n - \pi$. Infatti in tal caso si ha che

$$x_{n+1} = |x_n - \pi| = x_n - \pi,$$

dal momento che il valore assoluto di un numero positivo o nullo coincide con il numero stesso.

In altre parole, finché rimane maggiore o uguale a π, il numero scritto sulla lavagna continua a scendere di π ad ogni mossa.

Procedendo in questo modo, ad un certo punto il numero scritto sulla lavagna scenderà sotto π. Più precisamente, esisterà un intero n_0 tale che $0 \leq x_{n_0} < \pi$. A quel punto $x_{n_0} - \pi$ sarà negativo, e quindi fare il valore assoluto vorrà dire cambiarne il segno, cioè

$$x_{n_0+1} = |x_{n_0} - \pi| = \pi - x_{n_0}.$$

Ma allora il numero successivo sarà

$$x_{n_0+2} = |x_{n_0+1} - \pi| = |(\pi - x_{n_0}) - \pi| = | - x_{n_0}| = x_{n_0},$$

e quindi l'intero n_0 ha la proprietà richiesta.

Osservazione Più formalmente, si può definire n_0 come la parte intera di x_0/π, e dimostrare per induzione che

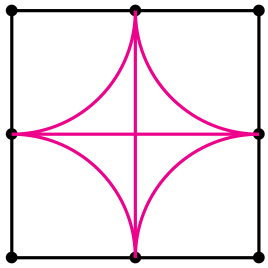
$$x_n = x_0 - n\pi \qquad \text{per ogni } n = 0, 1, \ldots, n_0.$$

Dalla definizione di parte intera si deduce poi che $0 \leq x_{n_0} < \pi$. Infine, sempre per induzione, si può dimostrare che per ogni $n \geq n_0$ Jack continuerà a scrivere sulla lavagna, alternativamente, solo i numeri x_{n_0} e $\pi - x_{n_0}$, e quindi l'uguaglianza $x_{n+2} = x_n$ vale per ogni $n \geq n_0$.

Un risultato analogo vale qualunque sia il numero x_0 scritto inizialmente.

Problema 2 – Soluzione.

L'insieme dei punti mediani è costituito dai due segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti del quadrato, e dai quattro archi di circonferenza ottenuti intersecando il quadrato con le quattro circonferenze di raggio $1/2$ con centro nei vertici del quadrato.



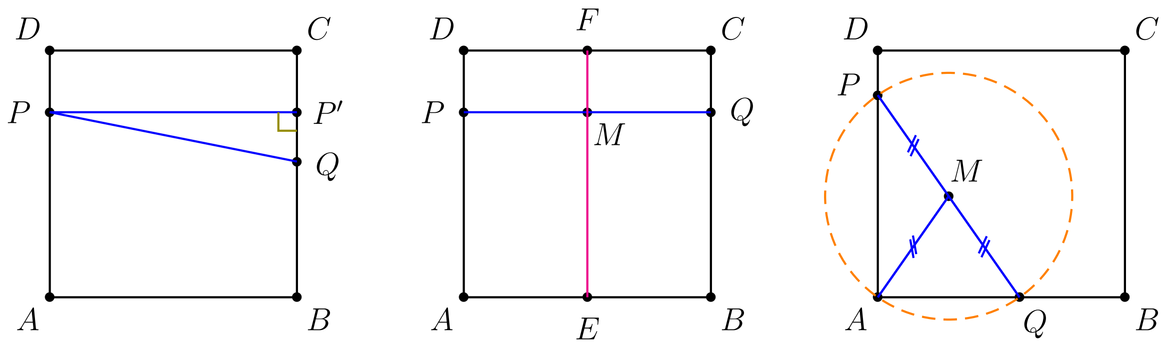
Per dimostrarlo, indichiamo con $ABCD$ i vertici del quadrato, e distinguiamo due casi, a seconda della posizione dei punti P e Q.

- Supponiamo che P e Q appartengano a due lati opposti del quadrato, ad esempio (senza perdita di generalità) che P stia sul lato AD e Q sul lato BC.

  Allora necessariamente il segmento PQ è parallelo ai lati AB e CD, perché se così non fosse sarebbe l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con un cateto di lunghezza unitaria (il triangolo $PP'Q$ nella figura a sinistra), e quindi la sua lunghezza sarebbe maggiore di 1. Ma allora il punto medio M di PQ si trova necessariamente sul segmento EF che congiunge i punti medi dei lati AB e CD (vedi figura in centro).

- Supponiamo che P e Q appartengano a due lati adiacenti del quadrato, ad esempio (senza perdita di generalità) che P stia sul lato AD e Q sul lato AB, come nella figura a destra.

  In tal caso il punto M è il punto medio dell'ipotenusa del triangolo rettangolo APQ, ed è ben noto che il punto medio dell'ipotenusa è il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo rettangolo. Ne segue che $AM = MP = MQ = 1/2$, ed in particolare M sta all'interno del quadrato e sulla circonferenza di raggio $1/2$ con centro in A.



Finora abbiamo dimostrato che ogni punto mediano appartiene a uno dei due segmenti oppure ad uno dei quattro archi di cerchio. Per completare la dimostrazione è necessario verificare che *tutti* i punti dei due segmenti e dei quattro archi sono effettivamente dei punti mediani. Distinguiamo allora nuovamente i due casi.

- Nel caso dei segmenti la verifica è sostanzialmente immediata. Preso per esempio un punto M sul segmento EF, basta costruire P e Q intersecando i lati AD e BC con la retta passante per M e parallela ai lati AB e CD.

- Nel caso degli archi, prendiamo per esempio un punto M del quadrato a distanza $1/2$ da A, e tracciamo la circonferenza con centro in M e raggio $1/2$. Tale circonferenza interseca nuovamente il lato AD in un punto P, ed interseca nuovamente il lato AB in un punto Q. Allora il triangolo PAQ è rettangolo in A ed il centro della sua circonferenza circoscritta, cioè il punto M, è proprio il punto medio dell'ipotenusa PQ. Ma allora $PQ = 2MP = 2MA = 1$, e di conseguenza il segmento PQ ha lunghezza unitaria.

Osservazione Il caso in cui i punti P e Q stanno sui lati AD e AB si può trattare anche costruendo il punto A' tale che $APA'Q$ sia un rettangolo, e osservando poi che in tal caso M è il punto medio della diagonale PQ, e quindi anche il punto medio della diagonale AA', che ha anch'essa lunghezza unitaria.

Problema 3 – Soluzione.

Ricordiamo che l'espressione *frazione egizia* indica una qualunque frazione che ha come numeratore 1, e come denominatore un intero positivo. Di conseguenza un numero n è egiziano se e solo se si può scrivere 1 come somma di frazioni egizie distinte, di cui la più piccola ha come denominatore n.

Soluzione punto (a) Il numero $n = 72$ è egiziano, perché ad esempio

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=1.$$

Soluzione punto (b) Il numero $n = 71$ non è egiziano. Supponiamo infatti per assurdo di avere una scrittura del tipo

$$1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{71}.$$

Osserviamo ora che 71 è un numero primo, e sommiamo le frazioni facendo il denominatore comunque, che sarà 71 per il minimo comune multiplo di $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Otteniamo una scrittura del tipo

$$1=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+\operatorname{mcm}\{a_1,\ldots,a_{k-1}\}}{71\cdot\operatorname{mcm}\{a_1,\ldots,a_{k-1}\}}.$$

Poiché gli a_i sono minori di 71, e quindi coprimi con esso, nel numeratore della frazione i termini $b_1, \ldots, b_{k-1}$ sono tutti multipli di 71, mentre l'ultimo addendo non lo è. Ne segue che il numeratore non è multiplo di 71, mentre il denominatore lo è, e di conseguenza la frazione non può essere uguale a 1.

Soluzione punto (c) Dimostriamo intanto che $n = 72^2$ è egiziano. Sfruttando una qualunque scrittura di 1 trovata al punto (a) otteniamo infatti che

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\cdot 1\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{2\cdot 72}+\frac{1}{4\cdot 72}+\frac{1}{8\cdot 72}+\frac{1}{9\cdot 72}+\frac{1}{72\cdot 72},
\end{aligned}$$

cioè una scrittura di 1 come somma di frazioni egizie distinte di cui la più piccola ha come denominatore 72^2.

Analogamente possiamo ora osservare che

$$\frac{1}{72\cdot 72}=\frac{1}{72\cdot 72}\cdot 1=\frac{1}{72\cdot 72}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}\right).$$

In questo modo possiamo sostituire la frazione con denominatore 72^2 con una somma di frazioni egizie di cui la più piccola ha come denominatore 72^3, dimostrando così che anche 73^3 è egiziano.

Iterando il procedimento (formalmente occorrerebbe procedere per induzione) si ottiene che ogni potenza di 72 è un numero egiziano.

Osservazione Con un procedimento analogo a quello utilizzato al punto (b) si può dimostrare che tutti i numeri primi, e più in generale tutte le potenze di un numero primo, non sono mai numeri egiziani.

Con un procedimento analogo a quello utilizzato al punto (c) si può dimostrare che ogni potenza di un numero egiziano è ancora un numero egiziano, e più in generale che il prodotto di due numeri egiziani è a sua volta un numero egiziano.

Curiosità Ci si potrebbe chiedere in quanti modi possiamo rappresentare 1 come somma di frazioni egizie diverse, di cui la più piccola è $1/72$.

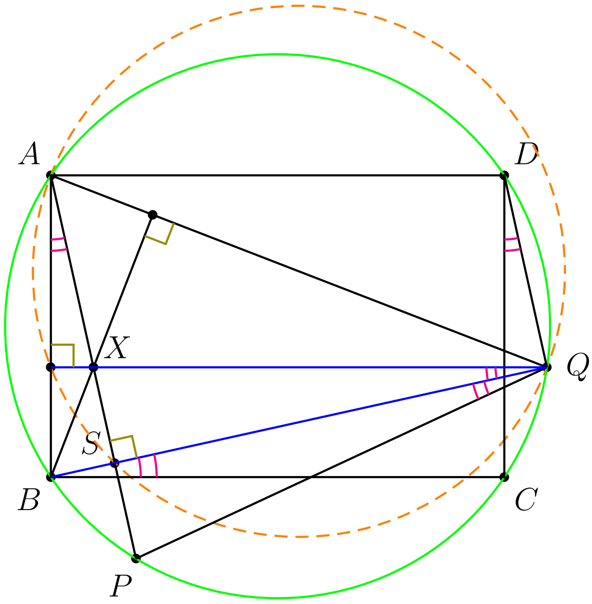
Con l'aiuto di un computer si trova che esistono ben 3 696 745 rappresentazioni distinte! Se ci si limita a rappresentazioni che utilizzano denominatori che hanno solo 2 e 3 come fattori primi, abbiamo comunque 53 rappresentazioni possibili.

Il numero minimo di addendi di una rappresentazione è cinque. Le rappresentazioni con cinque addendi sono, oltre a quella indicata al punto (a), anche

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{24}+\frac{1}{72}=1.$$

Problema 4 – Soluzione.

Indichiamo con θ l'ampiezza del minore degli archi alla circonferenza sottesi dagli archi uguali BP e CQ, indicati con un doppio archetto nella figura sottostante.



- Dimostriamo che S è il punto di intersezione delle rette AP e BQ.

  Per farlo, osserviamo che la retta AP si ottiene ruotando la retta AB di un angolo θ in verso antiorario, mentre la retta BQ si ottiene ruotando la retta BC di un angolo θ in verso antiorario. Poiché le rette AB e BC sono perpendicolari, ne segue che pure le rette AP e BQ sono perpendicolari. Di conseguenza il loro punto di intersezione vede il segmento AQ sotto un angolo retto, e dunque appartiene alla circonferenza di diametro AQ, e quindi è proprio il punto S.

- Dimostriamo che la retta QX è parallela ai lati AD e BC.

  Per farlo, consideriamo il triangolo ABQ. Il punto X è l'intersezione delle altezze uscenti dai vertici A e B, e quindi è l'ortocentro del triangolo. Ne segue che QX è l'altezza uscente dal vertice Q, pertanto la retta QX è perpendicolare ad AB, e quindi è parallela ai lati AD e BC.

- Dimostriamo la tesi del punto (a).

  Per farlo, osserviamo che

  $$\angle XQB = \angle CBQ = \angle BQP = \theta,$$

  in cui la prima uguaglianza segue dal parallelismo tra le rette QX e BC, e la seconda dall'uguaglianza degli archi BP e QC. Ne segue che nel triangolo XPQ la retta QS è altezza e bisettrice, e dunque il triangolo è isoscele in Q, e la retta QS è pure mediana, per cui S è il punto medio di XP.

- Dimostriamo la tesi del punto (b).

  Per farlo, consideriamo il quadrilatero $AXQD$. Sappiamo già che i lati AD e XQ sono paralleli. Ora osserviamo che anche i lati AX e DQ sono paralleli, in quanto si ottengono ruotando di un angolo θ in verso antiorario le rette parallele AB e DC. Ne segue che il quadrilatero è un parallelogrammo, ed in particolare $AX = DQ$.

Problema 5 – Soluzione.

Soluzione punto (a) Il minimo numero di guardie sufficienti per sorvegliare ogni fortezza con perimetro $P \leq 2024$ è 506, cioè un quarto del massimo perimetro possibile. La dimostrazione consiste di due parti.

- *Esempio.* Mostriamo che esiste una fortezza di perimetro 2024 per sorvegliare la quale servono almeno 506 guardie.

  A tal fine basta considerare una fortezza quadrata di lato 506 (e quindi perimetro 2024). Per sorvegliarla servono almeno 506 guardie, perché se ne usiamo di meno resteranno almeno una riga ed una colonna in cui non ci sono guardie, ed in tal caso la loro intersezione non sarebbe sorvegliata da nessuno.

- *Costruzione.* Mostriamo che 506 guardie bastano sempre.

  Mettiamo una prima guardia in una casella a scelta della fortezza, e coloriamo i quattro muri che questa guardia vede direttamente (sopra, sotto, a destra e a sinistra). Prendiamo ora una qualunque casella della fortezza che non è ancora sorvegliata, poniamo lì una seconda guardia, e coloriamo i quattro muri che questa guardia vede direttamente. Osserviamo che questi quattro muri sono tutti distinti dai quattro precedenti, perché altrimenti le due guardie sarebbero allineate in qualche direzione, e dunque la seconda si troverebbe in una casella già sorvegliata dalla prima.

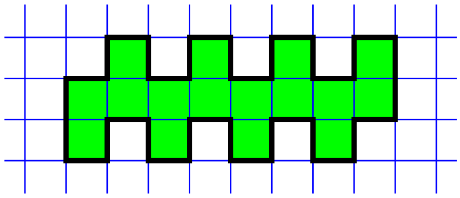
  Ripetiamo il procedimento finché necessario. Più precisamente, ad ogni mossa piazziamo una guardia in una casella a scelta tra quelle che non sono ancora sorvegliate, e coloriamo i quattro muri che questa vede direttamente, muri che sono sempre distinti da quelli colorati precedentemente.

  Dal momento che ogni guardia colora quattro muri, è chiaro che non potremo piazzare più di 506 guardie (potremmo anche piazzarne di meno, se il perimetro è inferiore a 2024, oppure se ad un certo punto si sono esaurite le caselle non sorvegliate prima di aver colorato tutti i muri). Basteranno queste guardie per sorvegliare tutta la fortezza? Sì, perché se alla fine, dopo aver piazzato tutte le 506 guardie disponibili, fosse rimasta una casella non sorvegliata, da questa dovrebbero vedersi dei muri non ancora colorati, che invece in quel caso non potrebbero esistere.

Soluzione punto (b) Il minimo numero di guardie sufficienti per sorvegliare ogni fortezza con area $A \leq 2024$ è 1012, cioè la metà della massima area possibile. La dimostrazione consiste di due parti.

- *Esempio.* Mostriamo che esiste una fortezza di area 2024 per sorvegliare la quale servono almeno 1012 guardie.

  A tal fine basta considerare un corridoio di lunghezza 1012, sul quale si aprono 1012 nicchie unitarie, alternativamente sui due lati (nella figura sottostante è rappresentata questa configurazione con un corridoio di lunghezza 8, ma la costruzione si generalizza facilmente a lunghezze arbitrarie).



Nessuna guardia può sorvegliare contemporaneamente due nicchie, quindi il numero di guardie richiesto è almeno uguale al numero di nicchie, dunque almeno 1012.

- *Costruzione.* Mostriamo che 1012 guardie bastano sempre.

  Supponiamo che le caselle della quadrettatura infinita siano colorate di bianco e nero a scacchiera. Nella fortezza il numero di caselle bianche, o il numero di caselle nere, sarà necessariamente minore o uguale di 1012.

  Supponiamo, senza perdita di generalità, che il numero di caselle bianche sia minore o uguale di 1012, e piazziamo una guardia in ogni casella bianca. Queste guardie bastano per sorvegliare tutta la fortezza, in quanto per definizione sorvegliano tutte le caselle bianche nelle quali sono poste, e ogni casella nera si trova a contatto di una casella bianca, dalla cui guardia viene quindi sorvegliata (qui stiamo usando l'ipotesi di "connessione" della fortezza, che impedisce la presenza di caselle isolate).

Problema 6 – Soluzione.

Dimostriamo che

$$M_1 = \frac{1}{2}, \qquad M_2 = \frac{7}{6}, \qquad M_n = n-1 \quad \text{per ogni } n \geq 3.$$

Nel caso $n = 1$ si tratta di massimizzare l'espressione $1/a_1$, che ovviamente risulta massima quando a_1 assume il valore minimo possibile, in questo caso 2.

Nel caso $n = 2$ si tratta di massimizzare l'espressione

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}.$$

Fissato il valore di a_1, l'espressione risulta massima quando a_2 assume il valore minimo possibile, in questo caso $a_2 = a_1 + 1$. Ci siamo quindi ridotti a massimizzare l'espressione

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_1+1} = \frac{1}{a_1} + 1 - \frac{1}{a_1+1} = 1 + \frac{1}{a_1(a_1+1)}.$$

Basta ora osservare che il denominatore della frazione risulta minimo (e quindi la frazione è massima) quando a_1 è il minimo possibile, cioè ancora $a_1 = 2$, in corrispondenza del quale troviamo che il massimo vale $7/6$.

Supponiamo ora che $n \geq 3$, e osserviamo che

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = 1 - \frac{a_{i+1} - a_i}{a_{i+1}},$$

da cui

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} = (n-1) + \left[\frac{1}{a_1} - \frac{a_2 - a_1}{a_2} - \frac{a_3 - a_2}{a_3} - \cdots - \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}\right].$$

Dividiamo ora la dimostrazione in due parti.

Stima dall'alto Dimostriamo che l'espressione compresa tra le parentesi quadre è negativa per ogni scelta ammissibile di $(a_1, \ldots, a_n)$, da cui seguirà che

$$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < n-1,$$

e quindi $M_n \leq n-1$.

Per farlo distinguiamo il caso in cui $a_2 \geq a_1 + 2$ e il caso in cui $a_2 = a_1 + 1$.

- Se $a_2 \geq a_1 + 2$, allora limitandoci ai primi due termini compresi tra le parentesi quadre otteniamo che

  $$\frac{1}{a_1} - \frac{a_2 - a_1}{a_2} = \frac{1}{a_1} - 1 + \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1} - 1 + \frac{a_1}{a_1+2} = \frac{2 - a_1}{a_1(a_1+2)} \leq 0,$$

  il che dimostra la tesi in questo primo caso (la disuguaglianza stretta segue dal fatto che tra le parentesi quadre c'è almeno un altro termine negativo, cioè quello con a_3).

- Se $a_2 = a_1 + 1$, allora limitandoci ai primi tre termini compresi tra le parentesi quadre otteniamo che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} - \frac{a_2 - a_1}{a_2} - \frac{a_3 - a_2}{a_3} &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 1} - \frac{a_3 - (a_1 + 1)}{a_3} \\
&= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 1} - 1 + \frac{a_1 + 1}{a_3} \\
&\leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 1} - 1 + \frac{a_1 + 1}{a_1 + 2} \\
&= \frac{2 - a_1^2}{a_1(a_1 + 1)(a_1 + 2)} \\
&< 0,
\end{aligned}$$

  il che dimostra la tesi anche nel secondo caso.

Stima dal basso Resta da dimostrare che $M_n \geq n - 1$. L'idea è di scegliere come $a_1, \ldots, a_n$ degli interi consecutivi molto grandi, in modo che l'espressione da massimizzare si avvicini a $n - 1$.

Più formalmente, supponiamo per assurdo che sia $\delta = (n - 1) - M_n > 0$. Fissato un intero positivo m, poniamo

$$a_1 = m + 1, \qquad a_2 = m + 2, \qquad \ldots, \qquad a_n = m + n.$$

In tal caso risulterà che

$$\begin{aligned}
M_n &\geq \frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
&= (n - 1) + \left[\frac{1}{m + 1} - \frac{1}{m + 2} - \frac{1}{m + 3} - \cdots - \frac{1}{m + n}\right] \\
&> (n - 1) - \left[\frac{1}{m + 2} + \frac{1}{m + 3} + \cdots + \frac{1}{m + n}\right] \\
&> (n - 1) - \frac{n - 1}{m},
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che la parentesi contiene $n - 1$ addendi, ciascuno minore di $1/m$. Abbiamo così ottenuto che

$$\frac{n - 1}{m} > (n - 1) - M_n = \delta,$$

cioè

$$\delta m < n - 1.$$

Poiché n e δ sono fissi, questa disuguaglianza non può essere vera quando scegliamo m sufficientemente grande. L'unica possibilità rimasta è dunque che sia $\delta = 0$.

Osservazione Dalla dimostrazione segue che nei casi $n = 1$ e $n = 2$ i valori ottimali M_1 ed M_2 vengono raggiunti per opportune scelte delle variabili, e quindi ci sono effettivamente dei casi di uguaglianza, cioè $a_1 = 2$ nel caso $n = 1$, e $(a_1, a_2) = (2, 3)$ nel caso $n = 2$.

Invece per $n \geq 3$ la disuguaglianza è sempre stretta, e l'ottimalità di M_n si ottiene solo "asintoticamente" considerando valori molto grandi, e vicini tra di loro, delle variabili.