



XXV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 4 Maggio 2024



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

PRIMA PARTE: LA CROCIERA DEGLI ENIGMI

1. Una crociera di relax

Vennma, Daφne, Fredmath, S-Higgs con il loro fidato amico Scoobe-Zout sono in viaggio per raggiungere i genitori di Fredmath e partire per una rilassante crociera per festeggiare il suo compleanno. Durante il viaggio, tra una chiacchiera e l'altra, Vennma disegna sul suo quadernino un rettangolo $ABCD$ con $AB = 60\text{mm}$ e $BC = 80\text{mm}$. Sulla diagonale AC costruisce un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B . Allo stesso modo su BD costruisce un rettangolo passante per A . Daφne prende il rossetto e colora tutta la figura e infine esclama: "Ora è molto meglio!". *Calcolare l'area colorata ovvero l'area dell'unione dei tre rettangoli.*

2. Cocktail di Benvenuto

Finalmente si parte per la crociera, e tutto inizia nel migliore dei modi: con un aperitivo inaugurale. S-Higgs e Scoobe-Zout hanno già l'acquolina in bocca, ma scoprono che per poter partecipare al buffet bisogna trovare un numero n di due cifre uguale alla somma tra il quadrato della cifra delle decine e il cubo della cifra delle unità. *Determinare la somma di tutti i numeri con queste proprietà.*

3. Visita alla nave

Summy Suy Deevysori, la direttrice della crociera, conduce il gruppo di visitatori alla scoperta delle meraviglie della nave: le piscine ottagonali, la stanza dei rompicapo, la palestra della mente e si ferma davanti ad uno stretto corridoio $2m \times 6m$ che deve ancora essere piastrellato. Summy invita a tassellarlo completamente usando solo materassini da $1m \times 2m$ o da $1m \times 3m$, senza sovrapposizioni. *In quanti modi diversi possono raggiungere l'obiettivo?*

4. Biglietto da visita

Summy li saluta dando loro il biglietto da visita del Capitano Kronecker. Sul biglietto è scritta un'espressione letterale. Fredmath osserva che l'espressione è un polinomio e la somma dei coefficienti è 2. Vennma fa notare a tutti che il polinomio calcolato nel doppio NON è uguale al doppio del polinomio. La differenza è il doppio del quadrato della variabile diminuito di 1. Allora Daφne annota $p(2\clubsuit) = 2p(\clubsuit) + 2\clubsuit^2 - 1$.

Summy ricorda che per poter incontrare il Capitano Kronecker dovranno trovare il valore del polinomio calcolato in 2024. *Quale numero permetterà loro di incontrare il capitano?*

5. Il quesito del capitano

Arrivati dal Capitano Kronecker, egli esordisce dicendo "Come avrete capito dal mio biglietto da visita sono un appassionato di polinomi. Uno dei miei quesiti preferiti è: quanto vale il più grande coefficiente dispari nello sviluppo di $(x+y)^{13}$?" *Quanto vale la risposta?*

6. Incontri inquietanti

Scoobe-Zout ha incontrato sulla nave un tizio con l'impermeabile dall'aria un po' inquietante. Immediatamente fugge e salta tra le braccia di S-Higgs che vedendolo così spaventato decide di costruirgli un amuleto per proteggerlo. All'inizio S-Higgs prende un cubo di legno di 10000mm^3 . Tuttavia, poiché Scoobe-Zout preferisce gli ottaedri, S-Higgs usa il suo seghetto di precisione e taglia il cubo ottenendo un ottaedro che ha per vertici i centri delle facce del cubo. Finita l'operazione, però, Scoobe-Zout gli ricorda che nella tradizione inca gli ottaedri sono maledetti. Allora, di tutta fretta, S-Higgs ri-taglia l'ottaedro ottenendo un cubo che ha per vertici i centri delle facce dell'ottaedro. *Quanto vale, in millimetri cubi, il volume dell'amuleto?*

7. Per un tuffo in piscina!

Fredmath non vede l'ora di disfare la valigia e mettersi il costume, ma arrivato alla camera scopre che per entrare deve digitare una combinazione: un numero n di esattamente 4 cifre, tutte diverse da zero, tale che $n = a^a + b^b + c^c + d^d$ dove a, b, c, d sono rispettivamente le cifre delle migliaia, delle centinaia, delle decine e delle unità di n . Qual è la combinazione agognata?

8. Sbirciando problemi

Vennma arriva vicino alla piscina per incontrare Fredmath, ma si distrae notando che ci sono un po' di persone che chiacchierano sulle sdraio. Riesce a sbirciare un foglio dove legge: "Dato ABC un triangolo con $AB = 1$ e $AC = 2$, sia Γ la sua circonferenza circoscritta, di centro O . Siano D e S rispettivamente le intersezioni dell'altezza da A e del prolungamento di AO con Γ . Inoltre AO interseca la retta BC in E . Sapendo che la circonferenza passante per D, E, S tangente la retta BC , determinare $1000 BC$ ". Vennma si avvicina al gruppo ed esclama "Beh, ma è facile, la soluzione è..." ma viene subito zittita da una persona: "Per favore, lasciate risolvere qualche enigma anche a noi!". Qual è la soluzione dell'enigma?

9. Partitina a carte

I genitori di Fredmath stanno giocando con un mazzo di 9 carte numerate da 1 a 9. Summy si avvicina, prende 4 carte e chiede: "Quanti sono i diversi modi di ordinare queste carte?", Scoobe-Zout risponde: "Scambiando la posizione delle 4 carte si possono ottenere 24 numeri di 4 cifre, tutti diversi." Allora S-Higgs chiede: "E se li sommassi tutti e 24 che numero otterrei?" Vennma osserva prontamente: "Dipende dalle carte, ma moltiplicando questa somma per un numero di esattamente tre cifre è possibile ottenere un quadrato perfetto n^2 ".

Al variare della scelta delle 4 carte iniziali, quanto vale al massimo n ?

10. Mandala extra-large

Sul ponte della nave c'è un gigantesco pannello formato da 2024×2024 caselle, inizialmente bianche, con il titolo "Keep calm and color on". Vennma e Daφne per rilassarsi iniziano a colorarle a turno: Vennma con il blu e Daφne con il rosso. Vennma seleziona a caso una casella qualsiasi della griglia e la colora. Poi Daφne sceglie un quadrato 2×2 contenente la casella appena colorata e colora le 3 caselle ancora bianche. Dopodiché Vennma sceglie un quadrato 3×3 contenente tutte e 4 le caselle già scelte e colora le 5 restanti. Continuano così, alternandosi, fino al 2024-esimo passaggio, in cui Daφne colora le ultime 4047 caselle bianche. Quante sono le possibili colorazioni finali della griglia?

Fornire come risposta la somma degli esponenti della fattorizzazione in fattori primi.

11. L'anello degli indovinelli

Sulla terrazza scoperta c'è un percorso ad anello formato da 20 caselle numerate in ordine da 1 a 20. Fredmath vuole giocare e si posiziona sulla casella 1, lancia un classico dado gigante a 6 facce e avanza di quanto indicato; gli viene posto un indovinello, se risponde correttamente comincia un nuovo turno tirando il dado, se sbaglia, invece, torna indietro di 2 caselle e poi comincia un nuovo turno tirando il dado. Può fare tutti i turni che vuole: è solo una sfida con se stessi. Sapendo che tutti gli indovinelli sono facili per lui e risponde correttamente a tutti, tranne a quello della casella 6, quante sono le possibili sequenze di 4 lanci del dado per le quali Fredmath torna esattamente sulla casella 1?

12. Evviva la cena!

C'è un tavolo pieno di deliziosi salatini. Il cameriere deve distribuire i salatini ai 6 ospiti: prima a S-Higgs che è il più affamato, poi a Fredmath, a sua madre, a suo padre, a Vennma e infine a Daφne. Prepara le porzioni con un elaborato cerimoniale: dà un salatino a Scoobe-Zout e la metà dei salatini restanti al primo ospite; poi dà due salatini a Scoobe-Zout e $\frac{2}{3}$ dei rimanenti al secondo ospite e continua così dando k salatini a Scoobe-Zout e $\frac{k}{k+1}$ dei rimanenti al k -esimo ospite. S-Higgs sta per addentare il suo primo salatino, ma il cameriere lo ferma e gli dice: "Sono riuscito a fare tutte le suddivisioni senza resti, senza dividere i salatini e tutti ne hanno ricevuto almeno uno. Indovina un po' quanti salatini ho distribuito?" Qual era il numero minimo di salatini inizialmente sul tavolo?

13. Conto alla rovescia

Durante la cena Summy presenta a tutti lo spettacolo di Mr MeeStern-Volmer, era lui il tizio inquietante. Durante lo spettacolo Mr MeeStern-Volmer scandisce con voce ritmata che: "Il rovescio di un intero positivo è l'intero positivo che si ottiene scrivendo le sue cifre al contrario. Ad esempio, il rovescio di 8267 è 7628 e il rovescio di 15620 è 2651." Dicendo questo ipnotizza tutto l'equipaggio e i passeggeri, tranne Scoobe-Zout e S-Higgs che sono concentrati sul cibo. Per poter interrompere lo stato di trance dovranno trovare il più piccolo intero positivo n tale che n meno il rovescio di n sia uguale a 12345678. Qual è il numero per uscire dalla trance?

Appena tutti si svegliano dalla trance, la nave da crociera viene assalita da pirati fantasma, guidati dal Capitano BarbaAlberta: essi rapiscono tutti i passeggeri e fanno affondare la nave, lasciando indietro solo S-Higgs, Fredmath, Vennma, Daφne e il fido Scoobe-Zout.

14. Verso il nascondiglio di BarbaAlberta [★★]

Per andare dal punto del naufragio al nascondiglio segreto di BarbaAlberta si seguono i lati delle caselle di una griglia di 2024×2024 quadretti. La nave pirata segue un percorso, il gruppo di Scoobe-Zout un altro. Sapendo che entrambe le compagini sono partite insieme da un vertice della griglia e arriveranno al vertice opposto seguendo un percorso minimo, se avessero scelto a caso i due percorsi, quale sarebbe stata la probabilità che i loro percorsi avessero come punti in comune solo quello iniziale e quello finale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

15. Ciarma, all'arrembaggio!

Arrivati al nascondiglio di BarbaAlberta, nemmeno il tempo di guardarsi attorno, che arriva anche il vascello pirata. Su di esso c'è il capitano BarbaAlberta e altri 2024 pirati, che per comodità sono numerati da 1 a 2024; al pirata m BarbaAlberta assegna un numero razionale positivo a_m in modo tale che, per $m = 31, 32, \dots, 2024$, si abbia

$$a_m = \frac{m^2}{\max_{1 \leq l \leq 30} \{l + a_{m-l}\}}.$$

I pirati tali che $a_m > m$ vengono spediti dal capitano in missione a catturare gli intrusi. Quanti sono i pirati mandati in missione? *Fornire la somma di tutte le possibili risposte.*

16. La cabina di BarbaAlberta [★★]

Vennma pensa: "BarbaAlberta sta nascondendo qualcosa: non posso aver visto degli aerei della Prima guerra mondiale volare sopra di noi". Indaga allora con Daφne sottocoperta fino a trovare il lucchetto a combinazione della cabina di BarbaAlberta, recante la scritta "lo spettro di $(x-2)(x+2)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ ". "Calzante, lo spettro di un polinomio a coefficienti interi per un pirata fantasma!" esclama Daφne. Vennma riflette: "Sono certa che lo spettro è un numero intero e, sommando gli spettri di tutti i polinomi figli di un polinomio p , si ottiene esattamente il valore del polinomio p calcolato nel suo grado!" Allora Daφne puntualizza: "Certo! E i polinomi figli di $p(x)$ sono quelli monici¹ a coefficienti interi che dividono il polinomio e il cui grado divide il grado di $p(x)$. Sorprendentemente ogni polinomio monico è figlio di se stesso." *Qual è la combinazione del lucchetto della cabina di BarbaAlberta?*

17. Interrogando le stelle

Per trovare il centro del pentagono delle Permuda devono ritrovare nel cielo le stelle rappresentate in un antico dipinto. Le stelle A, B, C e D formano un quadrilatero in cui $AB = 6, BC = 12$, la diagonale $AC = 16$, tale che la diagonale BD bisechi l'angolo \widehat{ABC} , e detta E l'intersezione delle diagonali, si abbia $BE \cdot ED = 21$. Si traccino le circonferenze C_1 e C_2 , circoscritte rispettivamente ai triangoli ABD e BCD . Esse intersecano AC rispettivamente in G e F . Le rette DF e DG intersecano infine i lati AB e BC rispettivamente in X e Y . *Determinare la lunghezza di XY moltiplicata per 100.*

18. Pentagono delle Permuda [★]

Con l'abbassarsi della marea, riaffiorano dalle acque cinque spuntoni di roccia posti ai vertici di un pentagono $ABCDE$ inscritto in una circonferenza di raggio $43\sqrt{3}$. $AB = BC, DE = EA$ e tutti i suoi lati hanno lunghezze espresse da numeri interi. Inoltre $\widehat{BAE} = 120^\circ$. *Quanto vale il perimetro di $ABCDE$?*

19. Ponte temporale [★]

Capitan BarbaAlberta spiega alla sua ciurma che per dominare i sette mari incontrastati devono aprire un portale con il passato. Il passaggio dal presente al passato è un cono con raggio di base $10m$ che scende verso gli abissi; il passaggio dal passato al presente è un cono identico ma ribaltato tale che il suo asse sia parallelo a quello del primo, il cui vertice sta sulla base del primo cono a distanza $6m$ dal centro della base. Considerata l'intersezione dei due coni e la sua proiezione sul piano che contiene la base del primo, il portale si attiva solo trovando l'area della regione di piano contenuta nella curva ottenuta tramite la proiezione. *Quale numero attiverà il portale?*

20. Lo scontro finale

Gli scheletri pirati sono ancora alle prese con la geometria solida quando ecco nel cielo apparire una nave aliena: sono Daφne e Fredmath mascherati. Daφne e BarbaAlberta iniziano il duello finale che consiste in questo gioco: si parte con una coppia di interi positivi (x, y) . La mossa da effettuare ad ogni turno consiste nel cambiare la coppia presente (x, y) con una coppia $(z, y - z)$, dove $1 \leq z \leq x$; il secondo numero, però, non può mai diventare negativo. Vince chi per primo riesce a cambiare la coppia in modo che il secondo numero sia 0. *Per quante coppie iniziali con $1 \leq x, y \leq 100$ Daφne ha una strategia vincente, sapendo che inizia per prima?*

¹un polinomio si dice monico se il coefficiente del termine di grado massimo è uguale ad 1.

21. L'ultimo enigma

Scoobe-Zout e i suoi amici hanno smascherato Mr MeeStern-Volmer e la sua messa in scena: attraverso l'ipnosi aveva arruolato i passeggeri come spettri pirata per impadronirsi dell'oro nascosto nel pentagono. Finita l'avventura, per festeggiare, Summy Suy Deevysori propone un ultimo enigma: calcolare la somma dei *pesi* dei divisori positivi di 2310, dove il *peso* di un numero naturale n è il quoziente tra il quadrato del numero dei divisori positivi di n e il numero n stesso. Qual è la soluzione dell'ultimo enigma di Summy? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



XXV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 4 Maggio 2024



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Una crociera di relax	8925
2	Cocktail di Benvenuto	0106
3	Visita alla nave	0030
4	Biglietto da visita	6577
5	Il quesito del capitano	1287
6	Incontri inquietanti	0370
7	Per un tuffo in piscina!	3435
8	Sbirciando problemi	2236
9	Partitina a carte	6666
10	Mandala extra-large	4046
11	L'anello degli indovinelli	0028
12	Evviva la cena!	0079
13	Conto alla rovescia	6080
14	Verso il nascondiglio di BarbaAlberta [★★]	8095
15	Ciurma, all'arrembaggio!	2820
16	La cabina di BarbaAlberta [★★]	2530
17	Interrogando le stelle	0802
18	Pentagono delle Permuda [★]	0417
19	Ponte temporale [★]	0062
20	Lo scontro finale	9724
21	L'ultimo enigma	0028