XL Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico 2024

3 maggio 2024

Criteri di valutazione e schemi di correzione

Introduzione

Questo documento contiene gli schemi di correzione usati nella Finale Nazionale 2024 delle Olimpiadi di Matematica (amichevolmente, Cesenatico 2024).

Per ogni esercizio vengono indicati vari passaggi intermedi e i punteggi ad essi attribuiti (in modo tra loro additivo, se non diversamente indicato); inoltre, sono riportati i più comuni errori e le loro penalizzazioni, casi di osservazioni che non valevano punti. Infine, si danno anche esempi di risposte incomplete o incorrette e il loro punteggio.

Lo scopo di queste pagine è triplice:

1. fornire a chi si prepara alle gare delle olimpiadi un'idea di cosa viene valutato e cosa no e di come viene corretta una prova;
2. fornire ai docenti che preparano i propri studenti una linea guida per il tipo di valutazione che viene utilizzata nelle finali nazionali, sia nell'ottica della preparazione degli studenti, sia nell'ottica della correzione dei loro elaborati in fasi precedenti;
3. fornire a chi ha partecipato a questa edizione della Finale Nazionale un modo di interpretare il punteggio preso in ogni singolo esercizio.

Consigliamo di accompagnare la lettura delle soluzioni ufficiali alla consultazione di questo documento.

Indice

Problema 1

> Jack scrive sulla lavagna il numero $x_0 = 2024^{2024}$.
>
> Successivamente lo cancella e scrive al suo posto $x_1 = |x_0 - \pi|$. Poi cancella x_1 e scrive al suo posto $x_2 = |x_1 - \pi|$, e così via. In altri termini, ad ogni mossa Jack cancella il numero x_n scritto precedentemente e lo sostituisce con $x_{n+1} = |x_n - \pi|$.
>
> Dimostrare che esiste un valore di n tale che $x_{n+2} = x_n$.

Soluzione

Consideriamo sulla retta dei numeri reali i seguenti intervalli di lunghezza π:

$$[0, \pi], \quad [\pi, 2\pi], \quad [2\pi, 3\pi], \quad [3\pi, 4\pi], \quad \ldots$$

Se per un certo intero k un numero x_k appartiene a uno di questi intervalli che non sia il primo, allora il numero x_{k+1} appartiene all'intervallo immediatamente a sinistra: infatti in questo caso x_k è maggiore o uguale a π e quindi x_{k+1} si ottiene sottraendo π da x_k, cioè vale $x_{k+1} = x_k - \pi$.

Il numero x_0 appartiene a uno di questi intervalli, precisamente all'intervallo

$$\left[\left\lfloor \frac{x_0}{\pi} \right\rfloor \pi, \left(\left\lfloor \frac{x_0}{\pi} \right\rfloor + 1 \right) \pi \right],$$

dove la scrittura $\lfloor y \rfloor$ indica la parte intera di un numero y, cioè il massimo intero minore o uguale a y.

Perciò esiste un intero positivo n, ad esempio $n = \left\lfloor \frac{x_0}{\pi} \right\rfloor$, per il quale il numero x_n appartiene all'intervallo $[0, \pi]$.

Sia dunque n un intero positivo n per cui vale $0 \leq x_n \leq \pi$. Sottraendo π a tutti i membri della catena di disuguaglianze otteniamo $-\pi \leq x_n - \pi \leq 0$ e dunque

$$x_{n+1} = |x_n - \pi| = \pi - x_n;$$

in particolare anche x_{n+1} appartiene all'intervallo $[0, \pi]$. Concludiamo osservando che vale la catena di uguaglianze

$$x_{n+2} = |x_{n+1} - \pi| = \pi - x_{n+1} = \pi - (\pi - x_n) = x_n.$$

Soluzione

A1. Osservare che esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ per il quale si ha $x_n \in [0, \pi]$: .... **2 punti**

A2. Dimostrare che se si ha $x_n \in [0, \pi]$ allora vale $x_{n+2} = x_n$: .... **5 punti**

- A2a. Osservare che per $x \leq \pi$ si ha $|x - \pi| = \pi - x$: .... 1 punto
- A2b. Osservare che vale $x_n \leq \pi \implies x_{n+1} \leq \pi$ .... 2 punti
- A2c. Concludere che vale $x_{n+2} = x_n$ .... 2 punti

Affermazioni e dimostrazioni che valgono punti in assenza di dimostrazioni della rispettiva parte

B1. Affermare che esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ per il quale si ha $x_n < \pi$: .... **1 punto**

B2a. Scrivere l'equazione $\big||x - \pi| - \pi\big| = x$: .... **1 punto**

B2b. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \big||x - \pi| - \pi\big|$: .... **2 punti**

Affermazioni e dimostrazioni che non valgono punti

C1. Dimostrare che per ogni intero positivo n si ha $x_n \neq 0$: .... **0 punti**

C2. Studiare il caso $x_n = 0$ o altri casi particolari: .... **0 punti**

C3. Affermare che la successione $(x_n)_n$ è periodica (da un certo punto in poi): .... **0 punti**

C4. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x - \pi|$: .... **0 punti**

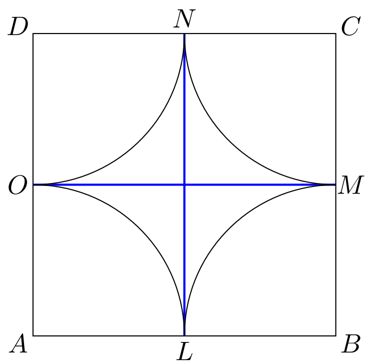
Punteggio tipico

Il punteggio tipico, attribuito a oltre il 90% dei partecipanti, è stato di 7 punti. In particolare si è deciso di non richiedere la presenza di una dimostrazione formale dell'esistenza di un intero n per il quale si ha $x_n < \pi$ per attribuire punteggio pieno.

Problema 2

> Sia dato un quadrato di lato unitario nel piano. Un punto M del piano di dice *mediano* se esistono due punti P e Q, appartenenti al bordo del quadrato, tali che
>
> - il segmento PQ ha lunghezza unitaria,
> - M è il punto medio di PQ.
>
> Determinare l'insieme costituito da tutti e soli i punti mediani.

La "croce"



Sono stati assegnati **2 punti** per una dimostrazione del fatto che i punti mediani M che sono punti medi di segmenti PQ i cui estremi P e Q si trovano su lati opposti del quadrato sono tutti e soli quelli dei segmenti che uniscono i punti medi di lati opposti del quadrato, ovvero i punti dei segmenti LN e MO in figura.

Aver identificato correttamente i segmenti LN ed MO è sufficiente per ottenere **1 punto**. Il punto ulteriore è stato assegnato solo se era possibile identificare chiaramente nell'elaborato un ragionamento che giustificasse il fatto che se P, Q si trovano su lati opposti, allora il punto medio di PQ giace su uno degli assi (orizzontale o verticale) del quadrato.

Ad esempio, un'argomentazione considerata sufficiente potrebbe suonare così:

> Siano P, Q punti su lati opposti del quadrato la cui distanza sia unitaria; sia H la proiezione di P sul lato su cui si trova Q. Se H e Q coincidono, allora PQ è parallelo a un lato del quadrato e il suo punto medio M si trova sul segmento che unisce i punti medi dei lati su cui non si trovano P, Q; se H non coincide con Q, allora PHQ è un triangolo rettangolo in H il cui cateto PH, parallelo al lato del quadrato, ha lunghezza unitaria, e quindi la sua ipotenusa PQ ha lunghezza maggiore di 1, il che contraddice l'ipotesi.

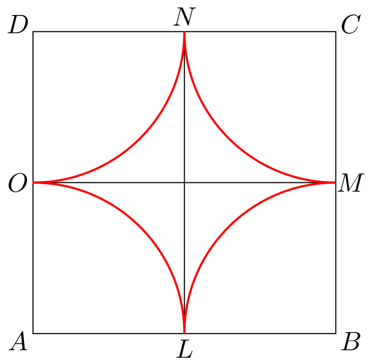
Alternativamente, anche la giustificazione seguente sarebbe stata accettata:

> Siano P, Q punti su lati opposti del quadrato; stabiliamo un sistema di coordinate cartesiane nel quale il lato del quadrato contenente P sia contenuto nella retta $y = 0$ e quello contenente Q nella retta $y = 1$. Dette (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q) le coordinate di P, Q, le coordinate del punto medio del segmento PQ sono $(x_M, y_M) = \left(\frac{x_P+x_Q}{2}, \frac{y_P+y_Q}{2}\right)$. Poiché $y_P = 0, y_Q = 1$, segue che $y_M = \frac{1}{2}$, quindi M si trova sull'asse $y = \frac{1}{2}$ del quadrato.

Un esempio di giustificazione insufficiente è invece il seguente, in cui il fatto che il segmento PQ debba essere parallelo a un lato è dato per scontato:

```
Siano $P, Q$ punti su lati opposti del quadrato. Siccome il segmento $PQ$ ha lunghezza unitaria,
la retta $PQ$ è parallela a un lato del quadrato. Di conseguenza, il punto medio di $PQ$ si trova
su $LN$ o $MO$.
```

I quarti di circonferenza



Sono stati assegnati **5 punti** per una dimostrazione completa del fatto che i punti mediani M che sono punti medi di segmenti PQ in cui P e Q si trovano su lati consecutivi del quadrato sono *tutti e soli* quelli dei quarti di circonferenza interni al quadrato (inclusi i punti sul bordo) ottenuti dalle circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ centrate nei vertici.

È stato assegnato **1 punto** se sono stati identificati chiaramente (e non solo disegnati) i quattro quarti di circonferenza.

Ulteriori **3 punti** sono stati assegnati per una chiara e completa dimostrazione di una delle due affermazioni seguenti:

- se M è il punto medio di un segmento unitario PQ i cui estremi P, Q si trovano su lati consecutivi del quadrato, allora M ha distanza $\frac{1}{2}$ da un vertice del quadrato (ovvero, si trova su una delle quattro circonferenze di raggio $\frac{1}{2}$ centrate nei vertici);
- se M è interno al quadrato e ha distanza $\frac{1}{2}$ da un vertice, allora esistono P, Q sul bordo del quadrato tali che PQ abbia lunghezza unitaria ed M ne sia il punto medio.

L'ultimo punto di questa sezione è stato assegnato solo se sono state dimostrate *entrambe* le affermazioni qui sopra.

Un caso particolare è quello di concorrenti che identifichino questa parte del luogo in modo più implicito, ad esempio arrivando a determinare se un punto M è o meno mediano tramite il fatto che la sua ascissa rispetti o meno determinate relazioni algebriche con la sua ordinata. In presenza di un corretto ragionamento di questo tipo che non arrivi però a completare la dimostrazione con il fatto che tali relazioni identifichino quarti di circonferenza, sono stati usualmente assegnati **3 punti** sui 5 totali per questa sezione.

I punteggi parziali più comuni

- **6 punti**: di solito, una dimostrazione tendenzialmente corretta in cui non sia sufficientemente giustificata una delle due implicazioni spiegate nella sezione precedente; talvolta, può trattarsi di una mancata giustificazione del fatto che un segmento unitario con estremi su lati opposti del bordo sia parallelo a un lato del quadrato;
- **5 punti**: di solito, una dimostrazione con entrambi i difetti espressi al punto precedente; talvolta, una dimostrazione completa che manchi di identificare le quattro curve del luogo come quarti di circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$, oppure che manchi completamente di individuare la parte del luogo contenuta negli assi;
- **4 punti**: di solito, la soluzione è solo parziale: manca completamente la parte "a croce" del luogo e non sono dimostrate con cura entrambe le affermazioni della sezione precedente; oppure non sono completamente identificati i quarti di circonferenza e manca la dimostrazione del fatto che un segmento unitario con estremi su lati opposti del bordo sia parallelo a un lato del quadrato;
- **meno di 4 punti**: vi sono seri errori o lacune nella soluzione; ad esempio, la soluzione è scritta in coordinate cartesiane e alcune delle equazioni dedotte per sezioni del luogo risultano errate.

Problema 3

> Un intero n si definisce *egiziano* se esiste una sequenza di interi positivi strettamente crescente $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = n$ (quindi l'ultimo termine della sequenza è n) tale che
>
> $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$$
>
> (a) Determinare se il numero $n = 72$ è egiziano.
>
> (b) Determinare se il numero $n = 71$ è egiziano.
>
> (c) Determinare se il numero $n = 72^{71}$ è egiziano.

Soluzione alternativa per (a) e (c)

Dimostriamo che ogni intero positivo n della forma $2^a \cdot 3^b$, con $a, b \geq 1$, è egiziano. In particolare, $72 = 2^3 \cdot 3^2$ e $72^{71} = 2^{3\cdot 71} \cdot 3^{2\cdot 71}$ sono egiziani, il che risponde affermativamente alle domande (a) e (c).

L'idea è quella di partire da $\frac{1}{n}$ e aggiungere frazioni opportunamente scelte (e tutte distinte) in modo che la somma risulti uguale ad 1, e più precisamente, in modo che ad ogni passo (cioè ogni volta che si aggiunge un addendo) il denominatore della somma effettuata fino a quel punto scenda. L'osservazione chiave è la seguente identità, che permette di dividere il denominatore per 3:

$$\frac{1}{2^a \cdot 3^b} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^b} = \frac{1}{2^a \cdot 3^b} + \frac{2}{2^a \cdot 3^b} = \frac{3}{2^a \cdot 3^b} = \frac{1}{2^a \cdot 3^{b-1}}.$$

Osserviamo che tale identità dice semplicemente che $x + 2x = 3x$, dove $x = \frac{1}{2^a \cdot 3^b}$. Per induzione, ne segue facilmente che

$$\frac{1}{2^a \cdot 3^b} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^b} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^{b-1}} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^{b-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3} = \frac{1}{2^a}.$$

La stessa conclusione si ottiene anche dalla formula per la somma della progressione geometrica: in effetti,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^b} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^{b-1}} + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3^{b-2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3} &= \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{b-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{b-2} + \cdots + \frac{1}{3} + 1 \right) = \\
&= \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3} \cdot \left(\frac{1 - (1/3)^b}{1 - 1/3} \right) = \\
&= \frac{1}{2^{a-1} \cdot 3} \cdot \left(\frac{1 - (1/3)^b}{2/3} \right) = \\
&= \frac{1}{2^a} \cdot \left(1 - (1/3)^b\right) = \frac{1}{2^a} - \frac{1}{2^a \cdot 3^b},
\end{aligned}$$

e sommando $\frac{1}{2^a \cdot 3^b}$ da entrambi i lati si ottiene l'uguaglianza voluta. Osserviamo ora che

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{2^{a-2}} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^a}, \tag{1}$$

come è facile dimostrare per induzione o usando nuovamente la formula per la somma della progressione geometrica. Otteniamo infine che la successione

$$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 8, \ldots, n_a = 2^a,$$
$$n_{a+1} = 2^{a-1} \cdot 3, n_{a+2} = 2^{a-1} \cdot 3^2, \ldots, n_{a+b} = 2^{a-1} \cdot 3^b,$$
$$n_{a+b+1} = 2^a \cdot 3^b$$

è crescente (ogni termine è o il doppio, o il triplo, o 3/2 volte il precedente), ha come ultimo termine proprio $2^a \cdot 3^b$, e soddisfa

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_a}+\frac{1}{n_{a+1}}+\cdots+\frac{1}{n_{a+b}}+\frac{1}{n_{a+b+1}}= \\ =\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^a}}_{1-\frac{1}{2^a}}+\underbrace{\frac{1}{2^{a-1}\cdot 3}+\frac{1}{2^{a-1}\cdot 3^2}+\cdots+\frac{1}{2^{a-1}\cdot 3^b}+\frac{1}{2^a\cdot 3^b}}_{\frac{1}{2^a}}=1.$$

Schema di valutazione

(a) La domanda (a) vale **2 punti**.

- **1 punto** per l'osservazione che è **sufficiente** trovare divisori distinti di 72, compreso il divisore 1, con somma 72.
- **2 punti** per qualsiasi esempio funzionante, anche non motivato.

(b) La domanda (b) vale **2 punti**. Punteggi parziali sono stati assegnati come segue:

- **1 punto** (non additivo con il successivo) per l'osservazione che nessuno dei denominatori $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ è divisibile per 71.
- **1 punto** (non additivo con il precedente) per chi porta la somma di frazioni a minimo comune denominatore e osserva che il denominatore è multiplo di 71.

(c) La domanda (c) vale **3 punti**.

Prima soluzione. Punteggi parziali sono stati assegnati come segue:

- **1 punto** (non additivo con il successivo) per la dimostrazione che se n è egiziano, allora $2n$ è egiziano.
- **1 punto** per la congettura che il prodotto di due numeri egiziani è egiziano ('l'insieme dei numeri egiziani è chiuso per prodotto').

  Nota. Alla sola affermazione "siccome 72 è egiziano allora 72^{71} (o 72^n) è egiziano" non è stato assegnato un punto.
- il punteggio massimo di **3 punti** è stato assegnato a chi abbia dimostrato che una risposta positiva ad (a) implica una risposta positiva a (c), anche in assenza di una risposta ad (a).

Seconda soluzione. Punteggi parziali sono stati assegnati come segue:

- **1 punto** per l'osservazione che, sommando una frazione della forma $\frac{1}{2^{a-1}3^b}$, si può far calare l'esponente di 3 nel denominatore di $\frac{1}{2^a 3^b}$.
- **1 punto** per l'osservazione che si può similmente far calare l'esponente di 2 nel denominatore.
- **1 punto** per concludere, ad esempio esibendo una successione esplicita che rispetta la condizione del testo.

Errori comuni

Gli errori più comuni sono stati relativi all'affermazione che è sufficiente studiare l'equazione del testo sotto l'ipotesi aggiuntiva che gli interi positivi a_i siano tutti divisori di n. Questo non è vero, come mostrato dai seguenti esempi, e ciò invalida ogni soluzione di (b) che tenti di caratterizzare i numeri egiziani come quegli n tali che la somma di alcuni divisori distinti di n (compreso 1) sia pari ad n, o equivalentemente come quegli n tali che la somma di alcuni divisori distinti di n (escluso 1) sia pari ad $n-1$.

1. Non è vero che per ogni soluzione dell'equazione
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_k}=1$$
con $a_k = n$ i numeri $a_1, \ldots, a_{k-1}$ sono necessariamente divisori di n. Per un esempio estremo, si può considerare il caso $a_k = n = 72$ e la somma
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}+\frac{1}{33}+$$
$$+\frac{1}{35}+\frac{1}{36}+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}+\frac{1}{45}+\frac{1}{52}+\frac{1}{55}+\frac{1}{63}+\frac{1}{66}+\frac{1}{72}=1.$$

2. Non è neppure vero che *se* un numero n è egiziano, *allora* esiste una soluzione dell'equazione
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{a_k}=1$$
con $a_k = n$ in cui tutti gli a_i sono divisori di n. Ad esempio, 231 è egiziano, perché
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1.$$
Tuttavia, è facile verificare che non si riesce a risolvere l'equazione
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}}+\frac{1}{231}=1$$
usando solo a_i che dividono 231. Per controllare questo fatto, basta osservare che non è possibile utilizzare il divisore 1 (altrimenti la somma sarebbe strettamente maggiore di 1), e d'altro canto gli altri divisori sono
$$3, 7, 11, 21, 33, 77, 231;$$
siccome
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{33}+\frac{1}{77}+\frac{1}{231}=\frac{51}{77}<1,$$
non si riesce a scegliere un sottoinsieme dei divisori di 231 (diversi da 1) la somma dei cui inversi faccia 1 – perché la somma degli inversi di *tutti* i divisori 'non arriva' ad 1.

Punteggi tipici

I punteggi positivi più frequenti sono stati 2, 4, 5, 7.

1. Il punteggio di 2 è stato di solito ottenuto esibendo un esempio che mostra che 72 è egiziano (domanda (a)) oppure dimostrando che 71 non è egiziano (domanda (b)). Alcuni di questi compiti contenevano, insieme ad una risposta ad (a), anche un tentativo di soluzione di (b), invalidato però dal fatto di considerare solo a_i che siano divisori di 71.

2. Il punteggio di 3 è risultato piuttosto raro, e di solito ottenuto con una risposta corretta alla domanda (a) combinata con un'osservazione utile sulla domanda (b) o con una soluzione incompleta dello stesso punto. Tipicamente, l'incompletezza risiedeva nel non aver menzionato in alcun modo il fatto che 71 è primo e che gli a_i precedenti ad a_k non sono divisibili per 71 in quanto minori di esso, oppure dall'aver affermato senza giustificazione che 71 deve dividere il prodotto $a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$.

3. Il punteggio di 4 è stato di solito ottenuto risolvendo le domande (a) e (b), o più raramente con soluzioni di (a) e (c) aventi un difetto sostanziale nella conclusione.

4. Il punteggio di 5 è stato di solito ottenuto con soluzioni corrette alle domande (a) e (c) ed errate o assenti alla domanda (b). Spesso in questi compiti ci sono argomentazioni che vanno nella direzione di dire 'un numero è egiziano se e solo se esiste un sottoinsieme dei divisori propri di n con somma $n-1$'. Come già osservato, questo è falso. Tuttavia, è *vero* che **se** esistono divisori propri con somma $n-1$, **allora** n è egiziano (è il viceversa che non vale!). In questi compiti, quindi, le domande (a) e (c) sono risolte correttamente (in quanto per queste domande è sufficiente trovare *una* soluzione dell'equazione del testo con $a_k = n$ – se questa soluzione coinvolge solo divisori di n, tanto meglio), mentre un'argomentazione per il punto (b) che consideri solo i divisori di 71 non risulta sufficiente.

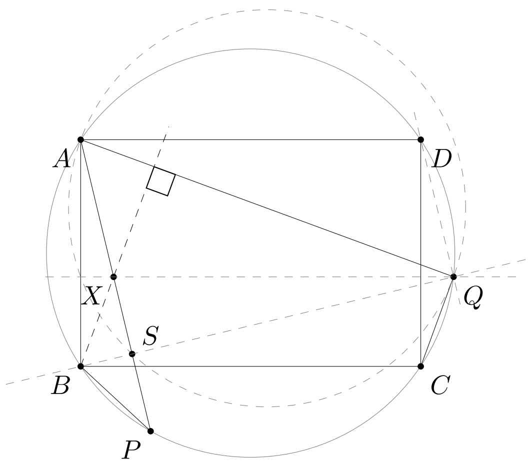
Problema 4

Sia $ABCD$ un rettangolo con $AB < BC$, inscritto in una circonferenza Γ. Siano P sull'arco BC (non contenente A) e Q sull'arco CD (non contenente A) tali che $BP = CQ$.

La circonferenza di diametro AQ interseca nuovamente la retta AP in S. La retta per B e perpendicolare ad AQ interseca la retta AP in X.

(a) Dimostrare che $XS = PS$.

(b) Dimostrare che $AX = DQ$.



La parte (a) del problema vale **4 punti**, mentre la parte (b) vale **3 punti**. I due punti sono indipendenti, è possibile dimostrare ciascuno di essi indipendentemente dall'altro, ma sono molto comuni soluzioni che usano (b) per dimostrare (a), o usano (a) per dimostrare (b).

Dimostrare che da (a) segue (b) vale comunque **3 punti** e dimostrare che da (b) segue (a) vale comunque **4 punti**.

La configurazione del problema presenta una "simmetria" nascosta: il punto S si trova sulla retta BD. Questo vuol dire che la retta AX (ovvero AP) è perpendicolare alla retta BQ, così come la retta BX è perpendicolare alla retta AQ. Da questo si deduce che X è l'ortocentro di $\triangle ABQ$, da cui $XQ \perp AB$ e dunque $XQ \parallel AD \parallel BC$. Questo è uno dei passaggi necessari per ottenere che $AXDQ$ e $BXQC$ sono parallelogrammi.

Punteggi parziali per il punto (b)

Seguono i passaggi intermedi per il punto (b):

B1. Dimostrare $AX \parallel DQ$: **1 punto**.
Questo segue dall'uguaglianza degli archi BP e CQ.

B2. Dimostrare che $BX \parallel CQ$: **1 punto**.
Questo perché sono entrambi perpendicolari ad AQ.

B3. Mostrare che i triangoli $\triangle ABX$ e $\triangle DCQ$ sono congruenti, o concludere in altro modo: **1 punto**.

Punteggi parziali per il punto (a)

Per il punto (a), le varie soluzioni utilizzano alcuni dei seguenti risultati. I punteggi riportati sono i parziali se si dimostra solo quel risultato e nessuno degli altri.

A1. I punti B, S, Q sono allineati. **2 punti**

A2. $\triangle BXP$ è isoscele: si può dimostrare con angle chasing, mostrando che $\angle BXP = \angle BPX$, oppure che $\angle XBS = \angle SBP$ (dopo aver mostrato a.1). **1 punto**.

A3. $AXQD$ (oppure $BXQC$) è un parallelogramma. **1 punto**.

A4. $APQD$ è un trapezio isoscele, o versioni più deboli come $PQ = BC$, oppure $\angle PAQ = \angle BAC$. **1 punto**.

È possibile concludere la dimostrazione combinando questi risultati parziali: A1 e A2 oppure A1 e A3 oppure A3 e A4.

Una soluzione corretta che conclude vale **4 punti**. Una qualsiasi combinazione dei fatti A1–A4 che non conclude, vale al massimo **3 punti**.

Soluzioni incomplete

Un errore comune consiste nel non dimostrare che B, S, Q siano allineati. Comunemente o "si vedeva dal disegno" e quindi il concorrente si dimenticava che non era un'ipotesi del testo, oppure veniva dimostrato con un ragionamento circolare. Osservare l'allineamento senza dimostrarlo e usarlo per andare avanti porta a una detrazione di **- 1 punto**.

Utilizzare implicitamente l'allineamento senza dichiararlo porta invece una detrazione di **- 2 punti**.

Un progresso parziale sui punti a) e b) senza dimostrare nessuno dei due, può valere al massimo **4 punti**.

Soluzione alternativa

Una soluzione alternativa consiste nel notare che X è l'ortocentro (nel modo spiegato sopra). A questo punto è una configurazione nota che il simmetrico dell'ortocentro rispetto al lato si trova sulla circonferenza circoscritta (ovvero che il simmetrico di X rispetto a S è proprio P), così come il fatto che D è il simmetrico di X rispetto al punto medio del lato AQ, da cui si deduce che $AXQD$ è un parallelogramma. I punteggi parziali per questa soluzione sono

- Dimostrare B, S, Q allineati: **2 punti**.
- Dimostrare X ortocentro di ABQ: **2 punti**.
- Enunciare correttamente solo uno dei due fatti noti per concludere la dimostrazione di uno solo tra a) e b): **1 punto**.
- Enunciare correttamente entrambi i fatti noti e concludere la dimostrazione: **2 punti**.

Problema 5

Una fortezza è un insieme finito di caselle in una griglia quadrata infinita, con la proprietà che da ogni casella si può raggiungere ogni altra casella muovendosi sempre tra caselle con un lato in comune. I muri della fortezza sono i segmenti unitari della griglia che separano un quadrato della fortezza da un quadrato non appartenente alla fortezza. L'area A di una fortezza è il numero di quadrati che la compongono. Il perimetro P di una fortezza è la lunghezza totale dei suoi muri.

Alcune caselle della fortezza possono contenere una guardia, che sorveglia tutte le caselle che si trovano sopra, sotto, a destra o a sinistra della sua posizione, senza muri in mezzo (ogni guardia sorveglia anche la casella in cui si trova).

(a) Determinare il più piccolo k per cui k guardie sono sufficienti per sorvegliare ogni possibile fortezza con perimetro $P \leq 2024$.

(b) Determinare il più piccolo k per cui k guardie sono sufficienti per sorvegliare ogni possibile fortezza con area $A \leq 2024$.

Schema e rapporto di correzione

L'esercizio è diviso in due parti, i punti a e b, ciascuna delle quali si divide in una direzione positiva – mostrare che un certo numero di guardie è sufficiente – e una direzione negativa – mostrare che meno non bastano. Abbiamo quindi quattro parti a^+, a^-, b^+, b^-, valutate rispettivamente punti 2, 1, 2, 2. Si è deciso di non assegnare punti per la semplice menzione dei numeri richiesti (506 e 1012), né per l'esame di casi particolari eccetto quelli che risolvono a^- e b^-.

Parte a^+

Fermo restando che una soluzione completa vale due punti, è possibile conseguire un solo punto con una soluzione parziale che esibisca un metodo di posizionamento capace di sorvegliare la fortezza con 506 guardie, corredato di un tentativo di quantificare il numero di guardie necessarie. La semplice descrizione di un metodo, per esempio l'algoritmo greedy (*aggiungo una guardia su una casella non sorvegliata finché ce ne sono*), non basta se non c'è un tentativo di quantificare il numero di guardie richieste.

Alcuni elaborati hanno tentato procedimenti per modifiche successive a partire dal caso di un rettangolo, o di una fortezza particolarmente semplice. Tentativi di questo genere possono condurre a soluzioni anche complete, ma è necessario valutare caso per caso. Esibire semplicemente il risultato nel caso dell'aggiunta o la rimozione di una singola casella da un rettangolo non vale punti.

Parte a^-

Per ottenere il punto è necessario mostrare che 506 guardie sono necessarie. Diversi elaborati mostrano configurazioni che richiedono un numero inferiore di guardie, anche 505: queste non bastano. La semplice menzione del fatto che un quadrato 506×506 richiede 506 guardie, però, è sufficiente.

Parte b^+

Questa parte del problema si presta ad innumerevoli approcci. Ogni soluzione completa vale due punti, si tratta quindi di valutare le soluzioni incomplete.

Uno degli attacchi più comuni è stato dedurre il risultato dal punto a (applicato ad un perimetro generico) tramite la disuguaglianza perimetro $\leq 2 \cdot$ area $+ 2$. Questa via di soluzione si divide nella dimostrazione della disuguaglianza e l'applicazione della medesima, che valgono un punto ciascuna.

Un altro approccio comune è impostare una ricorsione con l'idea di sorvegliare due o più caselle con una guardia, quindi procedere ricorsivamente sulla fortezza costituita dalle caselle restanti. Questo approccio può condurre a soluzioni complete in più di un modo, ma, comunque si proceda, è necessario gestire due difficoltà tecniche: che l'insieme delle caselle restanti potrebbe non essere connesso, e che le fortezze costituite da una singola casella richiedono particolare attenzione nel ragionamento, perché sono le uniche a richiedere più di area/4 guardie. È possibile ottenere un punteggio parziale per una soluzione incompleta di natura ricorsiva o induttiva, per ottenerlo, però, è necessario che sia evidente almeno un tentativo di gestire la difficoltà causata dalle fortezze di una sola casella.

Una soluzione ricorsiva può essere espressa, altresì, come metodo (ricorsivo) di tassellazione delle fortezze mediante tasselli facili da sorvegliare. Questo approccio si scontra con i medesimi ostacoli tecnici del precedente, e viene valutato allo stesso modo.

La soluzione suggerita dalla commissione, senza dubbio la più elegante, prevede di osservare che, colorando la fortezza a scacchiera, e ponendo una guardia su ciascuna delle caselle del colore meno frequente, la fortezza risulta sorvegliata. Alcuni elaborati offrono questa medesima soluzione. Non si è ritenuto che siano possibili punteggi parziali su questa via.

Sono stati previsti altri metodi risolutivi e varianti dei precedenti, che però non si sono manifestati fra gli elaborati, non ne facciamo quindi menzione. Resta fermo che ogni soluzione, ancorché diversa da quelle previste, viene valutata in base al suo merito matematico. D'altro canto, diversi elaborati hanno tentato procedimenti per modifiche successive che tentano di costruire la peggiore fortezza di area $A+1$ (ossia una che richiede un numero massimale di guardie per essere sorvegliata) aggiungendo una casella alla peggiore fortezza di area A. Questi procedimenti giungono, generalmente, a risultati sbagliati, ed è comunque una fallacia logica credere che il peggior caso di area $A+1$ si possa ottenere estendendo il caso peggiore di area A.

Vista la frequenza di questo caso, è utile osservare che il ragionamento *ogni guardia sorveglia almeno due caselle, quindi bastano area/2 guardie* è inconclusivo. È infatti vero che ogni guardia sorveglia almeno due caselle, ma la conclusione segue solo se ogni guardia sorveglia almeno due caselle *che non siano già sorvegliate da altre guardie*, e questo non è ovvio.

Parte b^-

Tutti gli elaborati, che hanno ricevuto i due punti di questa parte, hanno esibito una fortezza di area 2024 che richiede 1012 guardie, dimostrando questo fatto. Esibire una fortezza che richiede meno di 1012 guardie non basta per ottenere alcun punto. È possibile ottenere un solo punto dei due, esibendo la fortezza che necessita di 1012 guardie, senza però fornire un argomento sufficiente a dimostrare questo fatto.

Errori

I punteggi sono concessi anche in presenza di errori tecnici che non inficiano la struttura del ragionamento, in particolare errori aritmetici nel calcolo di 2024/2 e 2024/4 non sono ragione di penalità.

Problema 6

> Per ogni intero positivo n, determinare il più piccolo numero reale M_n tale che
>
> $$\frac{1}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq M_n$$
>
> per ogni n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ di numeri *interi* tali che $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Schema generale di suddivisione del punteggio

(a) 2 punti: dimostrare che $M_2 = 7/6$.

(b) 2 punti: dimostrare che $M_n \geq n - 1$.

(c) 3 punti: dimostrare che $M_n \leq n - 1$ per ogni $n \geq 3$.

Osservazioni generali

- Il caso $n = 1$ vale 0 punti, sia nel senso che dimostrare correttamente che $M_1 = 1/2$ vale 0 punti, sia nel senso che non si perdono punti se ci si "dimentica" del caso.
- Per ottenere i 2 punti della parte (a) occorre fornire una dimostrazione completa, non semplicemente asserire che $M_2 = 7/6$ perché "il caso peggiore è quello in cui $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$", o comunque perché "conviene scegliere le variabili in quel modo per massimizzare l'espressione".
- Le soluzioni che "dimostrano" il claim falso secondo il quale il massimo dell'espressione si ottiene sempre per i valori minimi possibili delle variabili ottengono 0 punti, anche se il claim sarebbe corretto nei casi 1 e 2.
- Per ottenere i 2 punti della parte (b) non occorre essere formali con la definizione di limite, ma bisogna citare esplicitamente che le variabili devono essere *grandi* e *vicine tra di loro* (ad esempio consecutive). Dire semplicemente "grandi" non basta.
- Le soluzioni che individuano correttamente il valore di M_n in funzione di n, ma si limitano a confrontare i due scenari in cui le variabili sono "piccole e consecutive" e quello in cui sono "grandi e consecutive" (asserendo o motivando qualitativamente che si tratta dei due scenari peggiori), di solito ricevono solo i 2 punti per la parte (b).
- Le soluzioni che individuano correttamente il valore di M_n in funzione di n, ma non completano né la parte (a) né la parte (b), di solito ottengono 1 punto.
- Per quanto riguarda la parte (c), è stato assegnato 1 punto per ricondursi al caso $n = 3$, dimostrando cioè che se $M_3 \leq 2$, allora $M_n \leq n - 1$ per ogni $n \geq 3$.