

EGMO Camp 2024 – Problemi delle sessioni Advanced

15-18 novembre 2023

Algebra – Advanced

A1. Come di consueto, sia $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme dei polinomi nella variabile x a coefficienti interi. Trovare tutte le funzioni $\theta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che per ogni $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ vale $\theta(p+1) = \theta(p) + 1$, e se $\theta(p) \neq 0$ allora $\theta(p)$ divide $\theta(p \cdot q)$.

A2. Sia $n \geq 2$ un intero positivo. Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ numeri reali non nulli tali che

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right) \left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right) \dots \left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Trovare tutti i possibili valori di $x_1, x_2, \dots, x_n$.

A3. Sia n un intero positivo. Dimostrare che il polinomio

$$P(x) = -1 + \prod_{k=1}^n (x^2 - 8kx + 25k^2)$$

non può essere scritto come il prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado almeno 1.

A4. Alice e Elena stanno facendo il seguente gioco. All'inizio hanno il polinomio $P(x) = 1 + x^{2024}$. Iniziando da Alice, alternando i turni, ciascuna sceglie un intero $k \in [0, 2024]$ e aggiunge x^k a $P(x)$. Per esempio, dopo due mosse il polinomio può essere $P(x) = x^{2024} + x^{420} + x^{69} + 1$. Se, subito dopo la mossa di Elena, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $P(t) < 0$, Elena perde il gioco. Dimostrare che Elena può giocare senza mai perdere.

A5. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tali che

$$f(xf(x+y)) = yf(x) + 1$$

vale per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}^+$

Combinatoria – Advanced

- C1.** Siano a, b, c , un interi positivi. Davide ha due scacchiere $a \times b$, due scacchiere $b \times c$ e due scacchiere $c \times a$ che sistema in un parallelepipedo $a \times b \times c$. Due celle sono "allineate" se possono essere connesse da un percorso di celle partenza = $c_1, c_2, \dots, c_m$ = arrivo tale che tutte le celle consecutive nel percorso condividano un lato, e i lati che le celle c_i condividono con i loro vicino sono opposti nel quadrato per $i = 2, 3, \dots, m - 1$.

Due torri si attaccano se le celle che occupano sono *allinete*. Qual é il massimo numero di torri che si possono piazzare sulle scacchiere in modo che nessuna torre ne attacchi un'altra?

- C2.** In una classe di liceo ci sono 20 studenti, e ogni studente ha esattamente tre amici stretti. Cinque studenti hanno comprato i biglietti per un concerto dei Maneskin che si terrà a breve. Se uno studente nota che almeno due dei suoi amici stretti hanno comprato un biglietto lo comprerà anche lui.

È possibile che l'intera classe compri biglietti per il concerto?

(Assumete che l'amicizia è mutuale; se uno studente A è un amico stretto di B , allora B è un amico stretto di A .)

- C3.** Julia e Marco giocano con una scacchiera $n \times m$, a partire da Julia. Ad mossa, il giocatore di turno deve scegliere una cella (x_0, y_0) sulla casella e cancellare tutte le celle che hanno coordinata x e coordinata y maggiori o uguali di, rispettivamente, la coordinata x_0 della cella scelta e la coordinata y_0 della cella scelta.

Un giocatore non può scegliere una cella che è già stata cancellata. Il giocatore che sceglie la casella nell'angolo in basso a sinistra.

Determinare chi ha una strategia vincente al variare di n ed m .

- C4.** Vi sono dati un insieme di n blocchetti, ciascuno dei quali pesa almeno 1; il loro peso totale è $2n$. Dimostrare che per ogni numero reale r con $0 \leq r \leq 2n - 2$ potete scegliere un sottoinsieme dei blocchetti il cui peso totale sia almeno r ma al massimo $r + 2$.

- C5.** Matteo e Veronica giocano al seguente gioco: dati n punti sul piano a tre a tre non allineati a turno disegnano un segmento tra due dei punti dati, a partire da Matteo. Perde il primo che costruisce un ciclo di lunghezza dispari: chi di loro ha una strategia vincente, al variare di n ?

Combinatorics – Advanced

- C1.** Let a, b, c be positive integers. David has two chessboards $a \times b$, two chessboards $b \times c$ and two chessboards $c \times a$ which he arranges in an $a \times b \times c$ cube. Two cells are "aligned" if they can be connected by a path of cells $\text{start} = c_1, c_2, \dots, c_m = \text{arrival}$ such that all consecutive cells in the path share a side, and the sides that the cell c_i shares with its neighbours are on opposite sides of the square for $i = 2, 3, \dots, m-1$.

Two towers attack each other if the cells they occupy are aligned. What is the maximum amount of towers he can place on the board such that no two towers attack each other?

- C2.** There are 20 students in a high school class, and each student has exactly three close friends in the class. Five of the students have bought tickets to an upcoming Maneskin concert. If any student sees that at least two of their close friends have bought tickets, then they will buy a ticket too.

Is it possible that the entire class buys tickets to the concert?

(Assume that friendship is mutual; if student A is close friends with student B , then B is close friends with A .)

- C3.** Julia and Marco play a game on an $n \times m$ chessboard. Julia starts. At each round the player who is playing must choose a cell (x_0, y_0) on the chessboard and delete all the cells that have both an x coordinate and a y coordinate that are greater or equal than, respectively, the x coordinate of the chosen cell and the y coordinate of the chosen cell.

A player cannot choose a cell that has already been deleted. The player who chooses the left low corner of the chessboard loses.

Determine who has a winning strategy, based on n and m .

- C4.** You are given a set of n blocks, each weighing at least 1; their total weight is $2n$. Prove that for every real number r with $0 \leq r \leq 2n - 2$ you can choose a subset of the blocks whose total weight is at least r but at most $r + 2$.

- C5.** Matteo and Veronica play the following game: given n points on the plane (never aligned) at each turn they draw a segment joining two of the given points, starting from Matteo. The first to draw a cycle of even length loses the game: who has a winning strategy, depending on n ?

Geometria – Advanced

- G1.** Let ABC be an acute triangle with $AB < AC$. The angle bisector of BAC intersects the side BC and the circumcircle of ABC at D and $M \neq A$, respectively. Points X and Y are chosen so that $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$, and $CY \perp MC$. Prove that the points X, D, Y are collinear.
- G2.** Let $ABCD$ be a parallelogram in which angle at B is obtuse and $AD > AB$. Points K and L are chosen on AC such that $\angle ADL = \angle KBA$ (the points A, K, C, L are all different, with K between A and L). The line BK intersects the circumcircle ω of ABC at points B and E , and the line EL intersects ω at points E and F . Prove that $BF \parallel AC$.
- G3.** Let ABC be an acute-angled triangle, M the midpoint of side BC , and D, E and F the feet of the altitudes from A, B and C , respectively. Let H be the orthocenter of $\triangle ABC$, S the midpoint of AH , and G the intersection of FE and AH . If N is the intersection of AM and the circle passing through B, C and H , prove that $\angle HMA = \angle GNS$.
- G4.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral satisfying $AD^2 + BC^2 = AB^2$. The diagonals of $ABCD$ intersect at E . Let P be a point on side $\overline{AB}$ satisfying $\angle APD = \angle BPC$. Show that line PE bisects $\overline{CD}$.
- G5.** Let ABC be a triangle with incenter I . Points P and Q are chosen on segments BI and CI such that $2\angle PAQ = \angle BAC$. If D is the touch point of incircle and side BC prove that $\angle PDQ = 90^\circ$.

Teoria dei Numeri – Advanced

- N1.** Veronica ha scritto dei numeri interi positivi distinti sulla lavagna. Si accorge che presi due qualsiasi di questi numeri, la loro somma è una potenza di un primo (eventualmente con esponente 1). Quanti numeri può avere scritto Veronica al massimo?
- N2.** Dimostrare che per ogni n intero positivo esistono n numeri successivi tali che nessuno di essi è libero da quadrati e nessuno di essi è un quadrato perfetto.
Un intero positivo m è libero da quadrati se non esiste d intero positivo maggiore di 1 tale che d^2 divide m .
- N3.** Trovare tutti gli interi positivi n tali che esista un multiplo di 2022 con somma dei quadrati delle cifre uguale a n .
- N4.** Trovare tutte le soluzioni intere del sistema:

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} \end{cases}$$

- N5.** Sia k un intero positivo, e $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sequenza di interi positivi. Definiamo la sequenza $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in modo che $b_i = \text{MCD}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k})$. Per quali k è possibile che tutti gli interi positivi compaiano esattamente una volta nella sequenza $b_0, b_1, \dots$?
- N6.** Chiamiamo un insieme di interi S *radicioso* se, per ogni n intero positivo e per ogni $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, tutte le radici intere del polinomio

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

sono anche in S . Trova tutti gli insiemi radiciosi che contengono tutti i numeri della forma $2^a - 2^b$ per a e b interi positivi.