

EGMO Camp 2024 – Problemi delle sessioni Basic

15-18 novembre 2023

Algebra Basic – Esercizi

- A1.** Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che valga $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(5) > 5$. Quanto vale come minimo $p(5)$?
- A2.** Si sa che per il polinomio $p(x) = x^2 + bx + c$ vale $p(p(1)) = p(p(2)) = 0$ e $p(1) \neq p(2)$. Quanto vale $p(5)$?
- A3.** Se $x + \frac{1}{x} = 3$, quanto vale $x^3 + \frac{1}{x^3}$?
- A4.** Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?
- A5.** Siano α, β, γ le radici del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$. Trovare un polinomio le cui radici sono $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$.
- A6.** Il polinomio $p(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri primi dispari e nei loro reciproci. Quanto vale il rapporto $p(2)/p(1/2)$?
- A7.** Il polinomio $p(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri primi dispari e nei loro reciproci. Quanto vale il rapporto $p(2)/p(1/2)$?
- A8.** Quante sono le coppie di numeri reali (x, y) che soddisfano entrambe le equazioni $x + y^2 = y^3$ e $y + x^2 = x^3$?
- A9.** Calcolare le seguenti espressioni:
- $1 + 2 + \dots + 2023$
 - $1^2 + 2^2 + \dots + 2023^2$
 - $1^3 + 2^3 + \dots + 2023^3$
 - $\lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{2023} \rfloor$
 - $3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2023}$
- A10.** Dimostrare che esistono infinite terne (x, y, z) di interi positivi tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato perfetto e con la proprietà che il massimo comun divisore dei tre numeri (x, y, z) sia 1.
- A11.** Determinare il minimo dell'espressione $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right)$ al variare dei numeri reali x, y tali che $x > 0, y > 0$ e $x + y = 8$.
- A12.** Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali $a \geq 0$ e $b \geq 0$ vale che $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.
- A13.** Quanto vale $xy(72 - 3x - 4y)$ al massimo, se x, y sono numeri reali positivi tali che $3x + 4y < 72$?

Algebra Basic – Problemi

A1. Trovare tutte le funzioni $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

- per ogni coppia di interi (m, n) con $m < n$ si ha $f(m) < f(n)$
- per ogni coppia di interi (m, n) esiste un intero k con $f(m) - f(n) = f(k)$.

A2. Ambra costruisce una sequenza di numeri, a partire da un numero reale positivo x_0 , nel seguente modo: dato l' n -esimo termine x_n , il termine successivo è $x_{n+1} = \left\{ 1 - \frac{1}{x_n} \right\}$, dove $\{\alpha\}$ rappresenta la parte frazionaria di α , cioè la differenza tra α e il massimo numero intero minore o uguale di α . Non appena Ambra ottiene un termine uguale a 0, interrompe la sequenza.

- (a) Dimostrare che se il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi, prima o poi la sequenza si interrompe.
- (b) Dimostrare che, se la sequenza si interrompe, allora il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi.

A3. Sia $\lfloor x \rfloor$ il più grande intero $\leq x$. Sia $\lambda \geq 1$ un numero reale tale che $\lfloor \lambda^2 \rfloor, \lfloor \lambda^3 \rfloor, \lfloor \lambda^4 \rfloor$ sono quadrati perfetti. Dimostrare che $\lfloor \lambda \rfloor$ è un quadrato perfetto.

Combinatoria Basic – Esercizi

- C1.** Quanti sono gli anagrammi della parole: EGMOISTE, COMBINATORIA, MERENDA.
- C2.** Quanti sono i percorsi sui bordi di una griglia $n \times m$ che partono da $(0,0)$ e arrivano a (m,n) passando per il punto (h,k) (che $h \leq m$ e $k \leq n$)?
- C3.** Dati n, k interi positivi, trovare in quanti modi è possibile scrivere n come somma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ con gli a_i interi positivi.
- C4.** Consideriamo un intero positivo n e la sua fattorizzazione $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Quanti sono i divisori di n ?
- C5.** Quanto fa

$$\sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} = \binom{2023}{0} + \binom{2023}{1} + \binom{2023}{2} + \dots + \binom{2023}{2023}?$$

E invece

$$\sum_{k=0}^{2023} (-1)^k \binom{2023}{k} = \binom{2023}{0} - \binom{2023}{1} + \binom{2023}{2} - \dots - \binom{2023}{2023}?$$

- C6.** Si scrivono su una lavagna i numeri da 1 a n e si effettua più volte la seguente mossa: presi due numeri a e b sulla lavagna, si cancellano e si scrive $|a - b|$, fino a quando non rimane un solo numero. Questo numero è pari o dispari?
- C7.** Consideriamo una tabella $m \times n$ in cui è scritto un numero intero in ogni casella. Una mossa consiste nello scegliere una riga o una colonna e cambiare il segno di tutti i numeri in quella riga o quella colonna. Esiste una sequenza di mosse in modo che alla fine la somma dei numeri in ciascuna riga (e ciascuna colonna) è maggiore o uguale a 0?
- C8.** Sulla lavagna ci sono scritti i numeri 8, 10, 15. Una mossa consiste nel prendere due numeri a, b scritti sulla lavagna e sostituirli con $(3a + 4b)/5$ e $(3b - 4a)/5$. È possibile che ad un certo punto sulla lavagna ci siano i numeri 11, 12, 13?
- C9.** In ogni vertice di un n -agone regolare c'è una pedina e con una mossa se ne possono scegliere 2 qualsiasi e spostarne una in un senso e l'altra in quello contrario. È possibile portarle in un unico vertice?
- C10.** Ad una festa ci sono 15 invitati e ciascuno di loro dice di aver stretto la mano ad esattamente 5 persone. Mostra che qualcuno sta mentendo.

C11. Dimostra le seguenti identità binomiali:

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

C12. Ci sono n persone divise in qualche modo tra m gruppi, in modo che ogni persona appartenga a 3 gruppi e ogni gruppo ha 3 persone. Mostrare che $n = m$.

Combinatoria Basic – Problemi

C1. Ogni numero naturale, zero incluso, è colorato di bianco o di rosso in modo che:

- vi siano almeno un numero bianco ed almeno un numero rosso;
- la somma tra un numero rosso e un numero bianco è bianca;
- il prodotto tra un numero rosso e un numero bianco è rossa.

Mostrare che la somma di due numeri rossi è rossa e il prodotto di due numeri rossi è rosso.

C2. In una gara di matematica si propongono 3 problemi, ciascuno dei quali viene valutato con un punteggio intero compreso fra 0 e 7 (estremi inclusi). Si sa che, comunque si scelgano due concorrenti, c'è al più un problema su cui questi hanno ottenuto lo stesso punteggio (per esempio, non ci sono due concorrenti i cui punteggi sui tre problemi siano 7, 1, 2 per il primo e 7, 5, 2 per il secondo, ma ci potrebbero essere due concorrenti i cui punteggi siano 7, 1, 2 e 7, 2, 1). Quanti sono al massimo i partecipanti alla gara?

C3. Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto alla pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale, quanti mazzetti di sette carte ha girato Magò?

C4. In una tabella di $n \times n$ quadratini, alcuni sono colorati di nero e altri di bianco, con le proprietà che:

- ogni quadratino bianco ha almeno quadratino nero adiacente;
- per ogni coppia di caselle nere è possibile andare da una all'altra lungo caselle nere.

Mostrare che il numero di caselle nere è almeno $(n^2 - 2)/3$.

C5. Alberto e Barbara hanno un grafo e iniziano a giocare facendo alternativamente una delle seguenti mosse:

- scelgono un triangolo formato da 3 archi e li cancellano;
- scelgono 3 vertici A, B, C dove A è collegato a B e C , ma B non è collegato a C . Cancellano gli archi AB e AC e aggiungono l'arco BC .

Mostrare che il gioco termina. Inizia Barbara. Determinare chi ha una strategia vincente.

Geometria Basic – Problemi

G1. Dati due segmenti AB e CD che si intersecano in un punto P dimostrare che $ACBD$ è ciclico se e solo se $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

G2. Sia ABC un triangolo tale che, detto H il piede dell'altezza condotta da C , si ha $AH = 3 \cdot HB$. Siano inoltre:

- M il punto medio di AB ;
- N il punto medio di AC ;
- P il punto dal lato opposto di B rispetto alla retta AC tale che $NP = NC$ e $PC = CB$.

Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

G3. Sia ABC un triangolo, denotiamo con M, N ed L i punti medi dei lati BC, AC, AB . Sia H l'ortocentro di ABC e sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC .

- Siano H_A, H_B e H_C i simmetrici di H rispetto ai lati BC, AC, AB . Dimostrare che H_A, H_B e H_C appartengono ad Ω .
- Siano H'_A, H'_B e H'_C i simmetrici di H rispetto ai punti M, N, L . Dimostrare che H'_A, H'_B e H'_C appartengono ad Ω .

G4. Sia ABC un triangolo, denotiamo con M il punto medio di BC e denotiamo con D, E ed F i piedi delle altezze uscenti rispettivamente da A, B e C . Sia infine H l'ortocentro di ABC .

- Mostrare che i quadrilateri $BCEF$ e $EA FH$ sono ciclici.
- Mostrare che la retta per A parallela a BC tangente la circonferenza circoscritta a $EA FH$.
- Mostrare che MF e ME tangono la circonferenza circoscritta a $EA FH$.
- Dimostrare che H è l'incentro di DEF . Il triangolo DEF si dice **triangolo ortico** del triangolo ABC .

G5. Sia ABC un triangolo, con incentro I e circonferenza circoscritta Ω .

- Sia L il punto di intersezione tra AI ed Ω e sia I_A il simmetrico di I rispetto ad L . Dimostrare che $BICI_A$ è ciclico e che II_A è un diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_A$.
- Dedurre dal punto precedente che I_A è l' A -excentro di ABC .
- Siano I_B e I_C gli altri excentri del triangolo ABC . Dimostrare che ABC è il triangolo ortico di $I_AI_BI_C$.

G6. Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e tale che $AB = BC$, $CD = DE$ ed $EF = AF$. Dimostrare che i segmenti AD , BE e CF concorrono (cioè hanno un punto in comune).

G7. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano

- D il piede della bisettrice dell'angolo in A ,
- E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
- F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
- G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC .

Teoria dei Numeri Basic – Esercizi

Induzione e Pigeonhole

N1. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

N2. I lati e le diagonali di un esagono sono colorati di rosso oppure di blu. Mostrare che è possibile scegliere tre vertici dell'esagono in modo che i tre segmenti che li collegano siano colorati dello stesso colore.

N3. Benedetta e Isabella giocano al seguente gioco: data una pila di n monete tolgono a turno un numero intero di monete compreso tra 1 e 6, partendo da Benedetta. Vince chi toglie l'ultima moneta dalla pila: chi di loro ha una strategia vincente, al variare di n ?

Divisibilità ed MCD

N4. Il numero $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \dots + 2023^{2023}$ è divisibile per 2023?

N5. Veronica scrive su una lavagna tutte le possibili sequenze costituite da 2017 interi positivi distinti la cui somma è $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$. Fatto ciò, sostituisce ognuna di tali sequenze con il massimo comun divisore dei suoi elementi. Quando questa lunga operazione è terminata, quanto vale il massimo dei numeri scritti alla lavagna?

N6. Congruenze

N7. Tutti sanno che l'espressione decimale del fattoriale di 19 è la seguente: $19! = 121.6x5.100.40y.832.z00$, dove x, y e z sono cifre incognite. Determinare $x^2 + y^3 + z^4$.

N8. Dimostrare che per ogni primo $p \neq 2, 5$ esiste un intero positivo m per cui il numero $11 \dots 11$ con m cifre è divisibile per p .

N9. Dimostrare che esistono 2023 interi consecutivi, ciascuno multiplo di un quadrato maggiore di 1.

Teoria dei Numeri Basic – Problemi

- N1.** Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ é un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non é un quadrato perfetto per nessun intero positivo n .
- N2.** Ogni numero naturale, zero incluso, é colorato di bianco o di rosso, in modo che:
- vi siano almeno un numero bianco ed almeno un numero rosso;
 - la somma tra un numero bianco ed un numero rosso sia bianca;
 - il prodotto tra un numero bianco ed un numero rosso sia rosso.

Dimostrare che il prodotto di due numeri rossi é sempre un numero rosso e che la somma di due numeri rossi é sempre un numero rosso.

- N3.** Trovare tutti gli interi positivi n tali che $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$ sia un quadrato perfetto.
- N4.** Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi e M un suo sottoinsieme con la seguente proprietà: preso un qualunque sottoinsieme $A \subseteq M$ costruiamo l'intero n_A come prodotto dei primi in A a cui sottriamo 1

$$n_A = -1 + \prod_{p_i \in A} p_i,$$

e chiediamo che qualunque divisore primo di n_A sia anch'esso contenuto in M . Dimostrare che $M = \mathbb{P}$.