

EGMO Camp 2024 – Problemi delle sessioni Medium

15-18 novembre 2023

Algebra Medium – Esercizi

- A1.** Fattorizzare i polinomi $x^4 + 1$, $x^6 + 1$ e $x^4 + 7x^2 + 10$ in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
- A2.** Consideriamo un polinomio monico p a coefficienti reali tale che $p(0) = 32$ e con la proprietà che, se $p(r) = 0$, si ha anche $p(r\omega) = 0$, dove $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Determinare $p(x)$.
- A3.** Determinare la somma dei cubi delle radici del polinomio $x^3 + 7x - 5$.
- A4.** Determinare la somma dei quadrati e dei reciproci delle radici del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$.
- A5.** Consideriamo un polinomio $p(x)$ di sesto grado a coefficienti reali, con la proprietà che $p(t) = t^2 \quad \forall t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sapendo che $p(6) = 0$, determinare $p(x)$.
- A6.** Dimostrare che queste disuguaglianze sono sempre verificate per numeri reali positivi e discutere per quali valori si ottiene l'uguaglianza (è consigliabile svolgerle nell'ordine in cui le abbiamo scritte):
- $a + 2b \geq \sqrt{8ab}$
 - $2a + b \geq 3\sqrt[3]{a^2b}$
 - $a + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}}$
 - $a + b + 4c \geq 4\sqrt[4]{a^2bc}$
 - $\frac{3a^2+2b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{6}{5}$
- A7.** Utilizzare opportune disuguaglianze per risolvere i seguenti problemi di massimo e di minimo, su reali non negativi:
- Massimizzare a^3b^2c sapendo che $a + b + c = 1$.
 - Minimizzare $a + 2b + 3c$ sapendo che $a^2bc = 1$.
 - Minimizzare $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ sapendo che $a + 2b + 3c = 1$.
- A8.** Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
- A9.** Fissati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R}$, si consideri $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$. Mostrare che il valore di x in cui f è minima è dato dalla media aritmetica degli a_k .
- A10.** Determinare le $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) + 2f(-x) = x^2 + 3x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A11.** Determinare le $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- A12.** Determinare le $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tali che $f(f(n)) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Algebra Medium – Problemi

A1. Dimostrare la disuguaglianza AM-GM: $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$ con il seguente procedimento.

- (a) Svolgere la dimostrazione nel caso $n = 2$
- (b) Mostrare che se la disuguaglianza vale per n , vale anche per $2n$
- (c) Mostrare che se la disuguaglianza vale per un certo n , vale anche per $n - 1$ (la scelta di $n - 1$ variabili è chiara; per la n -esima si può provare a usare una media delle prime $n - 1$)
- (d) Spiegare perchè il ragionamento precedente basta a verificare la tesi per ogni numero naturale n

A2. Determinare le $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Mostrare che esiste un numero reale u tale che $f(u) = 0$
- (b) Mostrare che $f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$
- (c) Dedurre da $f(f(y)) = y$ che f è iniettiva e suriettiva
- (d) Utilizzare la sostituzione $x = f(t)$ e semplificare usando quanto mostrato in precedenza
- (e) Utilizzare l'iniettività per dedurre che $f(t)^2 = t^2 \quad \forall t$
- (f) Mostrare che le uniche soluzioni sono $f(x) = \pm x$. Questo sembra discendere in modo immediato dal punto precedente, ma in realtà per arrivare a questa conclusione bisogna escludere tantissime soluzioni. Perchè?

A3. Determinare le $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tali che $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Dimostrare che $f(x) = ax$ è soluzione per ogni scelta razionale di a .
- (b) Dimostrare che $f(0) = 0$.
- (c) Dimostrare che, per ogni x razionale, $f(-x) = -f(x)$.
- (d) Dimostrare che, per ogni n intero, $f(n) = nf(1)$.
- (e) Dimostrare che, per ogni n intero e x razionale, $f(nx) = nf(x)$.
- (f) Dagli ultimi due punti, dedurre che, per ogni m e n interi, $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$.

Combinatoria Medium – Esercizi

- C1.** Dire quante sono le funzioni a) iniettive b) suriettive c) bigettive (quando è possibile trovarne) da insieme di cardinalità a a insieme di cardinalità b .
Nota : per le suriettive basta trovare una formula, non serve calcolarla.
- C2.** Dimostrare le seguenti identità coi binomiali:
- per $k < n, m$, $\sum_{d=0}^k \binom{n}{d} \binom{m}{k-d} = \binom{n+m}{k}$
 - $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$
- C3.** Preso un parallelepipedo di lati interi a, b, c quanti sono i percorsi che vanno dal vertice $(0, 0, 0)$ a quello (a, b, c) , in cui ci si può spostare solamente da un punto (x, y, z) ai tre vicini $(x+1, y, z)$, $(x, y+1, z)$ o $(x, y, z+1)$?
- C4.** Contare i percorsi in una griglia 17×17 che non passano da $(5, 5)$.
- C5.** Dimostrare che ogni intero coprimo con 10 ha un multiplo del tipo $11 \dots 11$.
- C6.** Dimostrare che, dati 28 punti in una sfera di raggio 2, ve ne sono almeno 2 la cui distanza è al più 2.
- C7.** Quale quadratino può essere tolto da una griglia 7×7 affinché il resto possa essere tassellato da domini 3×1 ?
- C8.** Per quali n è possibile tassellare una tabella $n \times n$ con tessere formate da 4 quadratini disposti a "T"?
- C9.** Su un tavolo ci sono n monete, si possono fare le seguenti mosse:
(i) Dimezzare le monete se sono in numero pari.
(ii) Togliere 3 monete se sono un multiplo di 3.
Per quali n si può raggiungere 0? Per quali n si può raggiungere 1?
- C10.** Su una lavagna sono inizialmente scritti i numeri 8, 10, 15. Una mossa consiste nel prendere $\{a, b\}$ scritti sulla lavagna, cancellarli e sostituirli con $\{\frac{3a+4b}{5}, \frac{3a-4b}{5}\}$. È possibile avere sulla lavagna 11, 12, 13 dopo un certo numero di mosse?

Combinatoria Medium – Problemi

- C1.** Sia n un intero positivo. Un treno ferma in $2n$ stazioni numerate in ordine. Per ogni coppia di interi i, j con $1 \leq i < j \leq 2n$ è stato prenotato esattamente un posto per il tragitto tra le stazioni i e j . Qual è il numero minimo di posti necessari sul treno affinché non ci siano sovrapposizioni?
- C2.** Si consideri un 2022-agono coi punti numerati $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ con numeri scritti sui vertici. All'inizio su A_1 e A_3 è scritto il numero 1 e su tutti gli altri vertici è scritto uno 0. Le mosse consentite sono:

- aggiungere 1 a due vertici consecutivi.
- aggiungere 1 a due vertici opposti.

Dimostra che non è possibile riuscire a ottenere 1 su ogni vertice.

- C3.** Dimostrare che una griglia quadrata $2^n \times 2^n$ a cui è stato tolto il quadratino in basso a sinistra può essere sempre tassellata con tessere a forma di "L" formate da tre quadratini.
- C4.** Dimostra che dato un quadrato è sempre possibile suddividerlo in n quadrati (non per forza delle stesse dimensioni) per $n \geq 6$
- C5.** Sui vertici di un n -agono regolare vengono inizialmente messe n caramelle, una in ogni vertice. Una mossa consiste nello scegliere due caramelle e spostarne una nel vertice immediatamente successivo in senso orario e l'altra in quello immediatamente successivo in senso antiorario. Per quali n è possibile portare tutte le caramelle nello stesso vertice?
- C6.** Determinare il più piccolo numero reale $a > 0$ per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 1 usando 5 triangoli equilateri di lato a .
- C7.** Dimostrare che esiste almeno un intero positivo che si può scrivere come somma di 2015 potenze 2014-esime distinte in almeno 2 modi.
- C8.** In una gara ci sono a partecipanti e b giudici, con $b \geq 3$ intero *dispari*. Ogni partecipante ha ricevuto come voti solo "promosso" oppure "bocciato" da ciascun giudice. Supponiamo di sapere che ogni coppia di giudici è d'accordo su al più k partecipanti.
Dimostrare che $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.
- C9.** Su una scacchiera $n \times n$ vengono piazzate alcune pedine seguendo le seguenti condizioni:
- ogni casella che non contiene una pedina condivide un lato con almeno una casella "occupata";

- data ogni coppia di quadrati che contengono una pedina, esiste una sequenza di quadrati tutti contenenti pedine che le collega e tale che ogni due caselle consecutive della sequenza condividono un lato (ossia l'insieme delle caselle con pedina è connesso).

Dimostrare che sulla scacchiera sono state piazzate almeno $\frac{n^2-2}{3}$ pedine.

C10. Sia n un intero positivo. Pietro ha sei $n \times n$ scacchiere che dispone a formare un cubo $n \times n \times n$. Due celle si dicono "allineate" se possono essere connesse da un cammino di celle $a = c_1, c_2, \dots, c_m = b$ tali che tutte le celle consecutive nel cammino abbiano un lato in comune, e c_i shares with its neighbors are on opposite sides of the square for $i = 2, 3, \dots, m - 1$.

Two towers attack each other if the cells they occupy are aligned. What is the maximum amount of towers he can place on the board such that no two towers attack each other?

Geometria Medium – Esercizi

- G1.** Sia ABC un triangolo, siano H l'ortocentro di ABC e H'' il simmetrico di H rispetto al punto medio del lato BC . Dimostrare che H'' appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC .
- G2.** Sia ABC un triangolo, siano H l'ortocentro di ABC e H' il simmetrico di H rispetto al lato BC . Dimostrare che H' appartiene alla circonferenza circoscritta ad ABC .
- G3.** In un triangolo ABC siano M_A, M_B i punti medi di BC e CA , H_A, H_B i piedi delle altezze da A e da B su BC e CA . Dimostrare che M_A, M_B, H_A, H_B stanno su una circonferenza.
- G4.** Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X e Y . Siano P su Γ_1 e Q su Γ_2 tali che PQ sia tangente a entrambe le circonferenze. Dimostrare che il punto medio di PQ sta su XY .
- G5.** Sia ABC un triangolo e siano D, E, F i punti medi di BC, CA, AB . Sia P l'intersezione tra AD e EF e sia Q l'intersezione tra CP e AB . Mostrare che $AB = 3AQ$.
- G6.** Siano ABC un triangolo, Γ la circonferenza circoscritta ad ABC , I il suo incentro, I_A l'excentro opposto ad A , M il punto medio dell'arco BC su Γ che non contiene A . Dimostrare che IBI_AC è ciclico e che M è il centro della circonferenza ad esso circoscritta.
- G7.** Dato un segmento AB nel piano, consideriamo un punto M su di esso diverso da A e da B . Due triangoli equilateri AMC e BMD nel piano sono costruiti dalla stessa parte del segmento AB . Le circonferenze circoscritte ai due triangoli si intersecano in M e in un altro punto N .
a) Dimostrare che AD e BC passano per N .
b) Dimostrare che, indipendentemente da dove sia scelto il punto M lungo AB , tutte le rette MN passano per un certo punto K fissato del piano.
- G8.** Sia ABC un triangolo di circocentro O . Sia K un punto tale che $\angle KCB = 90$ e che KA sia tangente alla circonferenza circoscritta ad ABC . Sia il punto D su BC tale che $KD \parallel AB$. Dimostrare che DO passa per A .
- G9.** Siano ABC un triangolo, BE, CF altezze, M il punto medio di BC . Dimostrare che ME, MF e la retta per A parallela a BC sono tangenti alla circonferenza AEF .
- G10.** Siano ABC un triangolo e P un punto sulla circoscritta ad ABC . Siano X, Y e Z le proiezioni di P su BC, CA, AB . Dimostrare che X, Y, Z sono allineati.

Geometria Medium – Problemi

- G1.** Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e sia P il punto di intersezione delle diagonali AC e BD . Detti O il circocentro del triangolo APB e H l'ortocentro di CPD , si dimostri che i punti O , P , H sono allineati.
- G2.** Sia ABC un triangolo rettangolo in A , non isoscele. Sia Γ una circonferenza passante per B e C , che interseca i lati AB e AC in D ed E rispettivamente. Siano inoltre O il centro di questa circonferenza, M il punto medio di BC , S il piede dell'altezza da A e K l'intersezione di ED con AS . Dimostrare che $AMOK$ è un parallelogramma.
- G3.** Sia ABC un triangolo. Sia A_1, B_1, C_1 il triangolo formato dai piedi delle altezze di ABC . Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo formato dai punti di tangenza dell'incirchio di $A_1B_1C_1$. Dimostrare che la retta di Eulero di ABC e la retta di Eulero di $A_2B_2C_2$ coincidono.
- G4.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo: sia Γ la circonferenza circoscritta, O il circocentro e G il baricentro. Supponiamo che GO sia perpendicolare a AG . Sia A' la seconda intersezione di AG con Γ . Sia D l'intersezione dei segmenti CA' e AB , e sia E l'intersezione di BA' e AC . Dimostrare che il circocentro del triangolo $\triangle ADE$ appartiene a Γ .
- G5.** Sia ABC un triangolo con $CA = CB$ e $\angle ACB = 120^\circ$, e sia M il punto medio di AB . Sia P un punto che varia sulla circonferenza circoscritta ad ABC e sia Q il punto sul segmento CP tale che $QP = 2QC$. Si supponga che la retta passante per P e perpendicolare ad AB intersechi la retta MQ in un unico punto N . Dimostrare che esiste una circonferenza fissata tale che N giace su questa circonferenza per tutte le possibili scelte di P .

Teoria dei Numeri Medium – Esercizi

- N1.** Trovare le soluzioni intere di $a + 2b + 10 = 3ab$.
- N2.** Risolvere negli interi l'equazione $y^2 = x^2 + 3x + 5$, possibilmente in due modi diversi.
- N3.** Sia $n \in \mathbb{Z}$. Mostrare che 24 divide sempre $n(n^2 - 1)(2n + 5)$
- N4.** Esiste un quadrato perfetto la cui scrittura in base 10 termini con 02? E un cubo perfetto? In generale, esiste una potenza perfetta k -esima, con $k > 1$ (numero della forma n^k , n intero positivo) la cui scrittura in base 10 termini con 02?
- N5.** Mostrare che tutte le potenze di 3 hanno la cifra delle decine pari.
- N6.** Qual è la cifra delle unità di 7^{7^7} ?
- N7.** Giorgia, Chiara e Giovanni devono decidere quando incontrarsi per correggere il test finale dell'EGMO Camp. Giorgia è libera una volta ogni sei giorni, a partire da martedì 21. Chiara è libera ogni 15 giorni, a partire da giovedì 30. Giovanni è libero ogni 8 giorni, a partire da venerdì 24. Quando riusciranno a correggere il test? E se invece decidessero di incontrarsi solo Giorgia e Chiara?
- N8.** Esistono 2023 interi consecutivi, ciascuno dei quali divisibile per un cubo perfetto (maggiore di 1)?
- N9.** Trovare le soluzioni intere di $86x + 25y = 1$.
- N10.** Michael ha una cisterna dalla grande capienza e inizialmente vuota e vuole versarci 12 litri d'acqua. Michael dispone però solamente di brocche di due diverse taglie: alcune possono contenere 21 litri d'acqua, altre possono contenerne 18. Non disponendo di modi di misurare la quantità d'acqua che prende, decide di riempire la cisterna solamente travasandone dentro tutta l'acqua di una brocca o prelevandone una brocca piena. Michael può riuscire nel suo intento? Qual è il minimo numero di travasi che deve compiere?

Teoria dei Numeri Medium – Problemi

- N1.** Trovare tutte le terne ordinate (p, q, n) di interi tali che p, q sono numeri primi e $p^2 + q^2 = pqn + 1$
- N2.** Paolo ha $c > 0$ chicken mcnuggets da impacchettare nei suoi contenitori, e per non sprecare contenitori vorrebbe riempirne un certo numero con la sua esatta capienza di chicken mcnuggets. Paolo dispone solamente di due tipi di contenitori, in numero illimitato, di capienze a e b , entrambe maggiori di 0. Supponiamo che sia $\gcd(a, b) = 1$. Vogliamo aiutare Paolo a dimostrare che può sempre adempiere al suo compito, con la condizione di avere almeno $mn - m - n + 1$ chicken mcnuggets da impacchettare.
- (a) Riformulare il problema in termini di equazioni diofantee. Fissato c , se x è il numero di contenitori di capienza a che Paolo usa e y quello di contenitori di capienza b , scrivere la soluzione generale del problema con x, y interi anche non positivi.
 - (b) Vogliamo ora capire quando ci sono soluzioni positive. Consideriamo il minimo intero positivo x tale che esiste una soluzione (x, y) con y intero. Cosa si può dire su x ? Se esistono soluzioni all'equazione negli interi positivi, come deve essere y ?
 - (c) Caratterizzare ora gli interi c tali che non esistono soluzioni con x, y entrambi maggiori di 0, e trovare il massimo tra tali interi.
- N3.** Determinare per quali interi positivi n vale $n = d(n)^2$, dove $d(n)$ è il numero di divisori positivi di n .
- N4.** Dimostrare il teorema di Wilson: se p è un numero primo, allora

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

- N5.** Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $3^k - 1 = x^n$ per $n > 3$.