

EGMO Camp 2025 – Problemi delle sessioni Advanced

14-17 novembre 2024

Algebra – Advanced

- A1.** Find all integers $n \geq 3$ such that among any n positive real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ with $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$, there exist three that are the side lengths of an acute triangle
- A2.** Let n be a positive integer and P, Q be polynomials with real coefficients with $P(x) = x^n Q(\frac{1}{x})$ and $P(x) \geq Q(x)$ for all real numbers x . Prove that $P(x) = Q(x)$ for all real number x
- A3.** Let $n \geq 3$ be an integer. Let $t_1, t_2, \dots, t_n$ be positive real numbers such that

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Show that t_i, t_j, t_k are side lengths of a triangle for all i, j, k with $1 \leq i < j < k \leq n$.

- A4.** Determine all functions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ with the property that

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

holds for all $x, y \in \mathbb{Z}$.

- A5.** For every $n \geq 3$, determine all the configurations of n distinct points $X_1, X_2, \dots, X_n$ in the plane, with the property that for any pair of distinct points X_i, X_j there exists a permutation σ of the integers $\{1, \dots, n\}$, such that $d(X_i, X_k) = d(X_j, X_{\sigma(k)})$ for all $1 \leq k \leq n$. (We write $d(X, Y)$ to denote the distance between points X and Y .)
- A6.** Prove that for any polynomial P with real coefficients, and for any positive integer n , there exists a polynomial Q with real coefficients such that $P(x)^2 + Q(x)^2$ is divisible by $(1 + x^2)^n$.
- A7.** Each point in the plane is labeled with a real number. Show that there exist two distinct points P and Q whose labels differ by less than the distance from P to Q .
- A8.** Determine all functions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfying

$$f(f(m) + n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014$$

for all integers m and n .

Combinatoria – Advanced

- C1.** Sia n intero positivo e $A = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ una sequenza che soddisfa $0 \leq a_i \leq i$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Si definisce

$$t(A) = t(a_0), t(a_1), \dots, t(a_n)$$

in modo che $t(a_i)$ sia il numero di termini in A che precedono a_i e sono diversi da a_i . Dimostra che dopo non più di n iterazioni di t si ottiene una sequenza B tale che $f(B) = B$.

- C2.** Nel Paese delle Meraviglie le città sono connesse da strade. Se due città sono connesse direttamente da una strada, esiste anche un percorso tra le due città che non usa quella strada. (C'è al più una strada che connette direttamente ogni coppia di città.) La Regina di Cuori ha incaricato le carte di picche di redigere un elenco di tutti i sottoinsiemi “pari” di strade, cioè i sottoinsiemi per cui ogni città è connessa a un numero pari di strade (possibilmente nessuna) nel sottoinsieme. Se il Paese delle Meraviglia contiene m strade e ci sono x sottoinsiemi pari, quante strade ci sono sull'elenco redatto dalle carte di picche se ogni strada è contata tutte le volte che appare?
- C3.** Nel Paese delle Meraviglie n città sono connesse da m strade e c'è (almeno) un percorso tra ogni coppia di città. Un sottoinsieme di strade è detto “pari” se ogni città è connessa a un numero pari di strade (possibilmente nessuna) nel sottoinsieme. Dati n e m , quanti sono i sottoinsiemi pari di strade?
- C4.** Nel Paese delle Meraviglie le città sono connesse da strade e c'è (almeno) un percorso tra ogni coppia di città. Il tuo compito è scegliere per ogni strada un verso di percorrenza, in modo tale che da ogni città parta un numero pari di strade. Quando è possibile?
- C5.** Si mescola un mazzo di $2n$ carte numerate da 1 a $2n$ e si distribuiscono n carte ad A e a B. A e B si alternano scartando ognuno una carta di faccia, comincia A. Il gioco termina quando la somma delle carte scartate sul tavolo è divisibile per $2n + 1$ e l'ultima persona a scartare vince. Qual è la probabilità che A vinca, se entrambi giocano in maniera ottimale?
- C6.** Hai 2^{2^n} monete, esattamente una delle quali è di cioccolata: il tuo obiettivo è trovarla. Hai infiniti cani a tua disposizione a cui puoi fare delle domande. Per fare una domanda scegli un cane e un sottoinsieme di monete: il cane ti dirà se la moneta di cioccolata è presente o meno nel sottoinsieme dato. Sfortunatamente esattamente uno dei cani (non sai quale) è malato e a ogni domanda risponde randomicamente. Riesci a trovare la moneta di cioccolata in $2^n + n + 2$ domande?

C7. Su una scacchiera 999×999 una torre può muoversi nel seguente modo: da ogni casella, si può muovere verso una delle caselle con un lato in comune e ad ogni mossa deve curvare, cioè le direzioni di due mosse consecutive devono essere perpendicolari. Un cammino semplice sulla griglia è una sequenza di caselle a due a due distinte che la torre può visitare con una sequenza valida di mosse. Un cammino semplice è detto ciclico se la torre, dopo aver raggiunto l'ultima cella, può muoversi direttamente sulla prima casella del cammino. Quante celle contiene il più lungo cammino semplice ciclico che la torre può visitare?

Combinatorics – Advanced

- C1.** Let n be a positive number and $A = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ be a sequence of integers satisfying $0 \leq a_i \leq i$ for each $i = 0, \dots, n$. Define

$$t(A) = t(a_0), t(a_1), \dots, t(a_n)$$

such that $t(a_i)$ is the number of terms of A preceding a_i and different from a_i . Prove that after no more than n iterations of t we obtain a sequence B such that $f(B) = B$.

- C2.** In Wonderland, towns are connected by roads, and whenever there is a direct road between two towns there is also a route between these two towns that does not use that road. (There is at most one direct road between any pair of towns.) The Queen of Hearts ordered the Spades to provide a list of all “even” subsystems of the system of roads, that is, systems formed by subsets of the set of roads, where each town is connected to an even number of roads (possibly none). For each such subsystem they should list its roads. If there are totally m roads in Wonderland and x subsystems on the Spades’ list, what is the number of roads on their list when each road is counted as many times as it is listed?
- C3.** In Wonderland, n towns are connected by m roads and there is (at least) a route between any pair of towns. A subsystems of the system of roads is said to be “even” if each town is connected to an even number of roads (possibly none). Given n and m , what is the number of even subsystems?
- C4.** In Wonderland, towns are connected by roads and there is (at least) a route between any pair of towns. Your task is to choose for each road an orientation, such that for each town the number of outgoing roads is even. For which system of roads is it possible?
- C5.** A deck of $2n$ cards numbered from 1 to $2n$ is shuffled and n cards are dealt to A and B. A and B alternately discard a card face up, starting with A. The game ends when the sum of the discards is first divisible by $2n + 1$, and the last person to discard wins. What is the probability that A wins if neither player makes a mistake?
- C6.** You have 2^{2^n} coins, exactly one of which is a chocolate coin: your goal is to find it. Luckily, infinite dogs are there to assist you. A query consists of choosing a dog and a subset of coins: the dog will tell you whether or not the chocolate coin is in the given subset. Unfortunately, exactly one dog (which you don’t know) is sick and when being queried the answer will be random. Can you find the chocolate coin in $2^n + n + 2$ queries?
- C7.** On a 999×999 board a rook can move in the following way: from any square it can move to any of its adjacent squares, i.e. a square having a

common side with it, and every move must be a turn, i.e. the directions of any two consecutive moves must be perpendicular. A non-intersecting route of the limp rook consists of a sequence of pairwise different squares that the rook can visit in that order by an admissible sequence of moves. Such a non-intersecting route is called cyclic, if the limp rook can, after reaching the last square of the route, move directly to the first square of the route and start over. How many squares does the longest possible cyclic, non-intersecting route of a limp rook visit?

Geometria – Advanced

- G1.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with $AC \perp BD$. Let E be the intersection between AC and BD and let X, Y, Z, W be the reflection of E over the four sides of the quadrilateral. Prove that $XYZW$ is cyclic.
- G2.** In a triangle ABC points D and E lie on AB and AC , respectively, such that $DE \parallel BC$. Let O_1 and O_2 be the circumcenters of triangles ABE and ACD . Line O_1O_2 meets AC in P and AB in Q . Let O be the circumcenter of triangle APQ and M the intersection between AO and BC . Prove that M is the midpoint of BC .
- G3.** Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and let P and Q be points in $ABCD$ such that $PQDA$ and $QPBC$ are cyclic quadrilaterals. Suppose that there exists a point E on the line segment PQ such that $\angle PAE = \angle QDE$ and $\angle PBE = \angle QCE$. Show that the quadrilateral $ABCD$ is cyclic.
- G4.** Let PQ be the diameter of semicircle γ . Circle Γ is internally tangent to γ and tangent to PQ at C . Let A be a point on γ and B a point on PQ such that $AB \perp PQ$ and AB is tangent to Γ . Prove that AC bisects $\angle PAB$.
- G5.** Given a triangle ABC , let H be the feet of the perpendicular from A on BC , let D be the point such that AD is the diameter of the circumcircle of ABC and let I be the incenter. Prove that $\angle BIH = \angle DIC$.
- G6.** Let ABC be an acute angled triangle satisfying the conditions $AB > BC$ and $AC > BC$. Denote by O and H the circumcentre and orthocentre, respectively, of the triangle ABC . Suppose that the circumcircle of the triangle AHC intersects the line AB at M different from A , and the circumcircle of the triangle AHB intersects the line AC at N different from A . Prove that the circumcentre of the triangle MNH lies on the line OH .

Teoria dei Numeri – Advanced

- N1.** Veronica ha scritto dei numeri interi positivi distinti sulla lavagna. Si accorge che presi due qualsiasi di questi numeri, la loro somma è una potenza di un primo (eventualmente con esponente 1). Quanti numeri può avere scritto Veronica al massimo?
- N2.** Dimostrare che per ogni n intero positivo esistono n numeri successivi tali che nessuno di essi è libero da quadrati e nessuno di essi è un quadrato perfetto.
Un intero positivo m è libero da quadrati se non esiste d intero positivo maggiore di 1 tale che d^2 divide m .
- N3.** Trovare tutti gli interi positivi n tali che esista un multiplo di 2022 con somma dei quadrati delle cifre uguale a n .
- N4.** Trovare tutte le soluzioni intere del sistema:

$$\begin{cases} x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157} \\ x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147} \end{cases}$$

- N5.** Sia k un intero positivo, e $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sequenza di interi positivi. Definiamo la sequenza $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in modo che $b_i = \text{MCD}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k})$. Per quali k è possibile che tutti gli interi positivi compaiano esattamente una volta nella sequenza $b_0, b_1, \dots$?
- N6.** Chiamiamo un insieme di interi S *radicioso* se, per ogni n intero positivo e per ogni $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, tutte le radici intere del polinomio

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

sono anche in S . Trova tutti gli insiemi radiciosi che contengono tutti i numeri della forma $2^a - 2^b$ per a e b interi positivi.