

EGMO Camp 2025 – Problemi delle sessioni Basic

14-17 novembre 2024

Algebra – Problemi noti

A1. Ambra costruisce una sequenza di numeri, a partire da un numero reale positivo x_0 , nel seguente modo: dato l' n -esimo termine x_n , il termine successivo è $x_{n+1} = \left\{ 1 - \frac{1}{x_n} \right\}$, dove $\{\alpha\}$ rappresenta la parte frazionaria di α , cioè la differenza tra α e il massimo numero intero minore o uguale di α . Non appena Ambra ottiene un termine uguale a 0, interrompe la sequenza.

- (a) Dimostrare che se il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi, prima o poi la sequenza si interrompe.
- (b) Dimostrare che, se la sequenza si interrompe, allora il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi.

A2. Sono dati $n \geq 3$ numeri reali positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Per ogni $1 \leq i \leq n$ definiamo $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (qui per a_0 si intende a_n e per a_{n+1} si intende a_1). Si assuma che, per ogni i e j tra 1 ed n , si abbia $a_i \leq a_j$ se e solo se $b_i \leq b_j$. Si dimostri che $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Algebra Basic – Eserciziario della Lezione

Il primo assaggio - identità algebriche

- A1.** Quante sono le coppie di numeri reali (x, y) che soddisfano entrambe le equazioni $x + y^2 = y^3$ e $y + x^2 = x^3$?
- A2.** (Sophie Germain) Mostrare che: $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$

Il piatto del giorno - polinomi

- A3.** Trovare tutti i $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(P(x)) = P(x)^2$.
- A4.** Trovare tutti i $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(Q(x)^3) = xP(x)Q(x)^3$.
- A5.** Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dimostrare che se $P(0)$ e $P(1)$ sono entrambi pari allora $P(n)$ è pari per ogni n intero.
- A6.** Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(2) = a$, $p(a) = a + 2$. Determinare i valori possibili per a .
- A7.** Trovare un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di quarto grado che soddisfa le condizioni $p(0) = 2, p(1) = 0, p(2) = 2, p(3) = 5$
- A8.** Esiste un polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che $P(n) = 1^7 + 2^7 + \dots + n^7$ per ogni n intero positivo? Se sì, calcolare $P(-1)$.
- A9.** $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado al più 2024 è tale che $P(n) = 2^n$ per $n = 0, 1, \dots, 2024$. Trovare $P(2025)$.
- A10.** Determinare la somma dei quadrati e dei reciproci delle radici del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$.

Dulcis in fundo - disuguaglianze

- A11.** Trovare tutte le terne di numeri reali (x, y, z) tali che $x^n + y^n + z^n = 0$ per ogni n intero positivo *dispari*.
- A12.** Dimostrare che per ogni $a \geq 0$ e $b \geq 0$ reali vale che $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

Algebra Basic – Problemi

Il primo assaggio - identità algebriche

A1. Se $x + \frac{1}{x} = 3$, quanto vale $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

A2. Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?

A3. Risolvere negli interi le equazioni:

$$x^2 - y^2 = 2000 \quad \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b+3} = 1 \quad mn + 2m - n - 8 = 0$$

A4. Dati a, b, c, d interi qualsiasi, mostrare che è possibile scrivere $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ come somma di due quadrati interi.

A5. Esprimere mediante le espressioni simmetriche elementari s, p, q le quantità:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad x^3 + y^3 \quad x^3 + y^3 + z^3 \quad x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$$

Il piatto del giorno - polinomi

A6. Trovare tutti i $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(P(P(x)))P(x) = [P(P(x))]^2$.

A7. Trovare tutti i $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P((x+1)^2) = x^4 + xQ(x)^2$.

A8. Sia $P(x) = (5x^{30} - 63x^{12} + 60)^{2024} - (5x^{30} + 63x^{12} + 60)^{289}$. Quanto vale la somma dei coefficienti di $P(x)$?

A9. Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dimostrare che se sia $P(0)$ che $P(1)$ sono dispari allora $P(x)$ non ha radici intere.

Affermazione	V/F
Se 3 è una radice, $p(10)$ è multiplo di 7	
Se $p(11)$ è multiplo di 6, 5 è una radice	
Se $p(0)$ e $p(1)$ sono pari, allora $p(n)$ è pari per ogni $n \in \mathbb{Z}$	
Se $p(0)$ e $p(4)$ sono pari, allora $p(n)$ è pari per ogni $n \in \mathbb{Z}$	
Se $p(1)$ e $p(3)$ sono pari, allora $p(n)$ è pari per ogni $n \in \mathbb{Z}$	
Se $p(0)$ e $p(1)$ non sono multipli di 3, allora $p(n)$ non è multiplo di 3 per ogni $n \in \mathbb{Z}$	
Se $p(0)$ è multiplo di $k \in \mathbb{Z}$, allora lo è $p(mk)$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$	
E' impossibile che $p(2) = 2, p(4) = a \in \mathbb{Z}, p(a) = 7$	
Se $p(3) = a$ e $p(a) = 5$, allora $a < 0$	

A10. Siano $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi e a, b, c tre interi distinti. Dimostrare che non è possibile avere $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

A11. Sia α una radice reale del polinomio $x^3 - x + 1$. Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?

A12. Trovare tutti i $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $(x - 10)P(x) = xP(x - 1)$.

A13. Sia $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che $P(0) = 2, P(1) = 4, P(2) = 6, P(3) = 56$. Determinare il resto della divisione di $P(x)$ per $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

A14. Determinare per quali valori interi di n le seguenti espressioni sono intere:

$$\frac{3n+10}{n+2}, \quad \frac{n+7}{2n+1}, \quad \frac{3n+1}{2n+3}, \quad \frac{15-3n}{2n^2+1}, \quad \frac{n^2-1}{n^3+1}, \quad \frac{n^7-15n^5+3n^3}{3n^4-15n^2+12}$$

A15. Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(5) > 5$. Qual è il valore minimo che può assumere $p(5)$?

A16. Sia $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 2$ e siano α, β, γ le sue tre radici reali. Quanto vale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$?

A17. Il polinomio $p(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri primi dispari e nei loro reciproci. Quanto vale il rapporto $p(2)/p(1/2)$?

A18. Siano α, β, γ le radici del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$. Trovare un polinomio le cui radici sono $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$.

Dulcis in fundo - disuguaglianze

A19. Dimostrare che se a, b, c sono numeri reali positivi, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

A20. Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali positivi. Dimostrare che

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

A21. Siano a, b, c numeri reali positivi. Trovare il minimo valore che può assumere

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+ac+bc}$$

A22. Determinare il minimo dell'espressione $(1 + \frac{1}{x}) \cdot (1 + \frac{1}{y})$ al variare dei numeri reali x, y tali che $x > 0, y > 0$ e $x + y = 8$.

A23. Trovare tutti i numeri reali (x, y) che soddisfano $x^2 + y^4 + 10 = 6y^2 - 2x$

Combinatoria Basic – Esercizi

Pigeonhole e induzione

- C1.** Siano dati 11 numeri estratti casualmente da $\{1, 2, \dots, 20\}$. Dimostrare che è possibile sceglierne due tra questi in modo tale che la loro differenza sia uguale a 5.
- C2.** Dimostrare che, in un gruppo di n persone, ce ne sono almeno due che hanno lo stesso numero di amici all'interno del gruppo.
- C3.** I vertici di un poligono convesso sono colorati con almeno 3 colori diversi in modo tale che non ci siano due vertici consecutivi con lo stesso colore. Dimostrare che si può dividere il poligono in triangoli con diagonali che non si intersecano tra loro e che collegano vertici di colori diversi.

Conteggi

- C4.** Consideriamo un intero positivo n e la sua fattorizzazione $n = 2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Quanti sono i divisori di n ?
- C5.** Quanti sono i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, \dots, 2024\}$ che hanno un numero dispari di elementi?
- C6.** Dati n, k interi positivi, trovare in quanti modi è possibile scrivere n come somma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ con gli a_i interi positivi.
- C7.** Quante sono le coppie ordinate (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$ tali che ci sia esattamente un elemento nell'intersezione di A e B ?
- C8.** Dimostra la seguente identità:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Combinatoria Basic – Problemi

Problemi noti

C1. Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo

- per ogni $i = 1, \dots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i ,
- cancella tutti i numeri scritti,
- scrive sulla lavagna i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono 0, 7, 2, 6, 2, dopo la prima mossa saranno 1, 3, 3, 3, 3, dopo la seconda mossa saranno 1, 1, 5, 5, 5, e così via.

- (a) Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.
- (b) Determinare, in funzione di n , il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k -esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.

C2. Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto alla pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale, quanti mazzetti di sette carte ha girato Magò?

Altri problemi

C3. Sia A un sottoinsieme di 10 elementi di $\{1, 2, \dots, 99\}$. Dimostrare che esistono due sottoinsiemi non vuoti distinti B, C di A tali che la somma degli elementi di B sia uguale alla somma degli elementi di C .

C4. Ogni casella di una griglia 4×7 è colorata di bianco o di nero. Dimostrare che esistono 4 caselle dello stesso colore sui vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. La cosa è vera anche per una griglia 4×6 ?

C5. Dimostrare che, dato un numero intero $n \geq 6$, è sempre possibile spezzare un quadrato di lato 1 in n quadrati (non necessariamente uguali).

Geometria Basic – Problemi

- G1.** Siano ABC un triangolo e siano D ed E le proiezioni di A sulle bisettrici uscenti da B e C . Dimostrare che DE è parallelo a BC .
- G2.** Dati due segmenti AB e CD che si intersecano in un punto P dimostrare che $ACBD$ è ciclico se e solo se $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.
- G3.** Sia ABC un triangolo tale che, detto H il piede dell'altezza condotta da C , si ha $AH = 3 \cdot HB$. Siano inoltre:
- M il punto medio di AB ;
 - N il punto medio di AC ;
 - P il punto dal lato opposto di B rispetto alla retta AC tale che $NP = NC$ e $PC = CB$.

Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

- G4.** Sia ABC un triangolo, denotiamo con M, N ed L i punti medi dei lati BC, AC, AB . Sia H l'ortocentro di ABC e sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC .
- (i) Siano H_A, H_B e H_C i simmetrici di H rispetto ai lati BC, AC, AB . Dimostrare che H_A, H_B e H_C appartengono ad Ω .
 - (ii) Siano H'_A, H'_B e H'_C i simmetrici di H rispetto ai punti M, N, L . Dimostrare che H'_A, H'_B e H'_C appartengono ad Ω .
- G5.** Sia ABC un triangolo, denotiamo con M il punto medio di BC e denotiamo con D, E ed F i piedi delle altezze uscenti rispettivamente da A, B e C . Sia infine H l'ortocentro di ABC .
- (i) Mostrare che i quadrilateri $BCEF$ e $EA FH$ sono ciclici.
 - (ii) Mostrare che la retta per A parallela a BC tangente la circonferenza circoscritta a $EA FH$.
 - (iii) Mostrare che MF e ME tangono la circonferenza circoscritta a $EA FH$.
 - (iv) Dimostrare che H è l'incastro di DEF . Il triangolo DEF si dice **triangolo ortico** del triangolo ABC .
- G6.** Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e tale che $AB = BC, CD = DE$ ed $EF = AF$. Dimostrare che i segmenti AD, BE e CF concorrono (cioè hanno un punto in comune).

G7. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano

- D il piede della bisettrice dell'angolo in A ,
- E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
- F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
- G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC .

Teoria dei Numeri Basic – Esercizi

Induzione

N1. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

N2. Determinare tutti gli interi n tali che $n^2 \leq 2^n$.

N3. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

N4. Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari $1 + 3 + \dots + (2n+1)$ è uguale ad n^2 .

Divisibilità

N5. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa; p denota un numero primo, a, b generici numeri interi.

- Se $p \mid ab$ allora $p \mid a$ o $p \mid b$
- Se $p^2 \mid ab$ allora $p^2 \mid a$ o $p^2 \mid b$
- Se $p \mid a - b$, allora $p \mid a + b$
- Se $p^2 \mid a^3$ allora $p^6 \mid a^6$
- Se $p^2 \mid b^3$ allora $p^2 \mid b$
- Se $p \mid \text{MCD}(a, b)$ allora $p \mid \text{MCD}(a^2, ab)$.

N6. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.

N7. Il numero $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \dots + 2023^{2023}$ è divisibile per 2023?

N8. Trovare tutti i primi p tali che $5p + 49$ sia un quadrato perfetto.

MCD e Algoritmo di Euclide

N9. Trovare tutte le coppie (a, b) tali che $a + b = 63$ e $\text{mcm}(a, b) = 962$.

N10. Per ogni intero positivo n , sia d_n il massimo comun divisore tra $100 + n^2$ e $100 + (n+1)^2$. Determinare il massimo valore possibile per d_n .

Teoria dei Numeri Basic – Problemi

N1. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ é un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non é un quadrato perfetto per nessun intero positivo n .

N2. Dimostrare che la frazione

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

è ridotta ai minimi termini

N3. Trovare tutti gli interi positivi n tali che $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$ sia un quadrato perfetto.

N4. Gli interi positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ soddisfano

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dimostrare che almeno uno dei numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ è divisibile per 2^{2020} .