

EGMO Camp 2025 – Problemi delle sessioni Medium

14-17 novembre 2024

Algebra Medium – Esercizi

A1. Ambra costruisce una sequenza di numeri, a partire da un numero reale positivo x_0 , nel seguente modo: dato l' n -esimo termine x_n , il termine successivo è $x_{n+1} = \left\{ 1 - \frac{1}{x_n} \right\}$, dove $\{\alpha\}$ rappresenta la parte frazionaria di α , cioè la differenza tra α e il massimo numero intero minore o uguale di α . Non appena Ambra ottiene un termine uguale a 0, interrompe la sequenza.

- (a) Dimostrare che se il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi, prima o poi la sequenza si interrompe.
- (b) Dimostrare che, se la sequenza si interrompe, allora il numero di partenza x_0 è della forma $\frac{p}{q}$, dove p e q sono interi positivi.

A2. Sono dati $n \geq 3$ numeri reali positivi $a_1, a_2, \dots, a_n$. Per ogni $1 \leq i \leq n$ definiamo $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (qui per a_0 si intende a_n e per a_{n+1} si intende a_1). Si assuma che, per ogni i e j tra 1 ed n , si abbia $a_i \leq a_j$ se e solo se $b_i \leq b_j$. Si dimostri che $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

A3. Dimostrare che queste disuguaglianze sono sempre verificate per numeri reali positivi e discutere per quali valori si ottiene l'uguaglianza :

- $x + 2y \geq 3\sqrt[3]{xy^2}$
- $\frac{(3x+y)^2}{3x^2+y^2} \leq 4$

A4. Determinare il termine generale della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$$

A5. Assumendo la disuguaglianza $GM \leq AM$ e le altre disuguaglianze dimostrate durante la lezione, mostrare che $HM \leq GM$ e $AM \leq QM$

A6. Definiamo la successione di polinomi $\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_{n+1}(x) = p_n(1)x^{n+1} + p_n(x) \end{cases}$
Determinare la somma dei coefficienti di p_n al variare di n .

A7. Siano $a_1, a_2 \dots a_n$ numeri reali positivi e $b_1, b_2 \dots b_n$ una loro permutazione. Mostrare che

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$$

A8. Utilizzare opportune disuguaglianze per risolvere i seguenti problemi di massimo e di minimo, su reali positivi (e dire quando vale l'uguaglianza):

- Massimizzare xy^3z^4 sapendo che $16x + 3y + z = \sqrt{2}$.
- Minimizzare $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ sapendo che $x + 4y + 9z = 18$.

A9. Trovare una formula generale per la somma dei primi n termini della successione di Fibonacci

A10. Sia $a_0 = 1$ e a_{n+1} il più piccolo intero multiplo di $n + 1$ maggiore di a_n . Determinare il termine generale della successione.

A11. Sia a_n una successione di reali positivi che soddisfa $a_1 = 1$, $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$.

- Mostrare che esiste un'unica successione con queste proprietà.
- Mostrare che $a_n \geq \frac{1}{n} \forall n$.

A12. Dimostrare che se a, b, c sono numeri reali non negativi, vale

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

A13. Dati $a_1, a_2 \dots a_n$ numeri reali, mostrare che

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

A14. Fissati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R}$, si consideri $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$. Mostrare che il valore di x in cui f è minima è dato dalla media aritmetica degli a_k .

A15. Definiamo la successione per ricorsione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_1a_2 \dots a_n \end{cases}$$

Mostrare che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_N} < 2$

A16. Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 2$ vale la disuguaglianza $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

A17. Determinare la somma dei cubi delle radici del polinomio $x^3 + 7x - 5$.

A18. Determinare la somma dei quadrati e dei reciproci delle radici del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$.

A19. Siano x, y reali positivi: mostrare che

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} + \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq 1$$

A20. Sia $n \geq 1$ e $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ un polinomio a coefficienti reali tale che $|P(0)| = P(1)$. Supponiamo che tutte le radici di $P(x)$ siano reali, e siano in $[0, 1]$. Dimostrare che $|a_0| \leq \frac{1}{2^n}$.

A21. Determinare il termine generale della successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \end{cases}$$

A22. Sia $p = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ un polinomio.

- Mostrare che, se esistono $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ distinti tali che $p(x_j) = p(-x_j) \forall j$, allora $a_i = 0$ per ogni i dispari (in tal caso il polinomio si dice pari).
- Analogamente, mostrare che se esistono $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ distinti tali che $p(x_j) = -p(-x_j) \forall j$, allora $a_i = 0$ per ogni i pari (in tal caso il polinomio si dice dispari).

A23. Determinare i polinomi p a coefficienti reali che soddisfano

$$\begin{cases} p(x^2) = x^2(x^2 + 1)p(x) \\ p(2) = 12 \end{cases}$$

A24. Determinare i polinomi p, q a coefficienti reali tali che $p((q(x))^3) = xp(x)(q(x))^3$.

A25. Siano $a > 0, x_0 > 0$ reali e consideriamo la ricorsione $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a^2}{2x_n}$

- Mostrare che se $x_0 > \sqrt{a}, x_n > \sqrt{a} \forall n$.
- Mostrare che se $x_n < \sqrt{a}, x_{n+1} > \sqrt{a}$.
- Mostrare che se $x_0 > \sqrt{a}, x_n$ è decrescente.

A26. Massimizzare $(a-b)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2$ al variare di a, b, c reali sapendo che $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

A27. Siano $a_1, a_2 \dots a_n, b_1, b_2 \dots b_n$ numeri reali, con i b_i positivi; allora

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

A28. Determinare i polinomi non nulli p, q , la cui somma dei gradi sia minima, che soddisfano $p(x^2) + q(x) = p(x) + x^5 q(x)$

A29. Siano $a_1, a_2 \dots a_n$ e $b_1, b_2 \dots b_n$ reali non negativi: mostrare che

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 b_2 \dots b_n)^{\frac{1}{n}} \leq ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n))^{\frac{1}{n}}$$

A30. Determinare tutti i polinomi monici p, q a coefficienti reali tali che $p(1) = 1$,

$$2p(x) = q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$$

A31. Siano $a_1, a_2 \dots a_n$ numeri reali compresi tra 0 e 1; mostrare che

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 a_2 \dots a_n + n - 1$$

A32. Sia $a_0 = 1$ e a_{n+1} l'unica radice positiva dell'equazione $x^2 + (a_n + n)x - 1 = 0$.
Mostrare che la successione a_n è decrescente.

A33. Definiamo la successione di polinomi $\begin{cases} p_0(x) = x \\ p_n(x) = p_{n-1}(x-1) \cdot p_{n-1}(x+1) \end{cases}$
Determinare, al variare di n , il massimo k tale che x^k divide p_n

Algebra Medium – Problemi

A1. Dati $x_1, x_2 \dots x_n$ reali non negativi, dimostrare la disuguaglianza AM-GM: $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$ con il seguente procedimento.

- (a) Svolgere la dimostrazione nel caso $n = 2$
- (b) Mostrare che se la disuguaglianza vale per n , vale anche per $2n$
- (c) Mostrare che se la disuguaglianza vale per un certo n , vale anche per $n - 1$ (la scelta di $n - 1$ variabili è chiara; per la n -esima si può provare a usare una media delle prime $n - 1$)
- (d) Spiegare perchè il ragionamento precedente basta a verificare la tesi per ogni numero naturale n

A2. Seguire il procedimento dato per ricavare il metodo di interpolazione polinomiale di Lagrange; siano $x_0, x_1 \dots x_n$ numeri reali distinti.

- (a) Mostrare che l'unico polinomio di grado al più n che si annulla in $x_0, \dots x_n$ è quello nullo.
- (b) Siano dati $y_0, y_1 \dots y_n$ reali non necessariamente distinti; mostrare che esiste al più un polinomio di grado $\leq n$ tale che $p(x_j) = y_j \forall j$.
- (c) Ora vogliamo mostrare che un tale polinomio esiste; definiamo

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

verificate che $L_i(x_j) = 0$ se $i \neq j$ e $L_i(x_j) = 1$ se $i = j$.

- (d) Come potete combinare gli L_i appena costruiti per ottenere un polinomio di grado al più n che soddisfi $p(x_j) = y_j \forall j$?
- (e) Dati $a < b < c$ reali, dimostrare l'identità

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} = 1$$

A3. Partiamo da un triangolo equilatero di lato a , dividiamo i suoi lati in tre parti e su quelle centrali costruiamo esternamente tre triangoli equilateri di lato $\frac{a}{3}$. Ripetiamo questo procedimento su ogni lato della figura ottenuta; chiamiamo K_n la forma ottenuta dopo n iterazioni di questo processo.

- (a) Scrivere il perimetro e l'area di K_n in funzione di a e n .
- (b) Come si comportano queste due quantità al crescere di n ? Dare un'interpretazione geometrica della risposta.

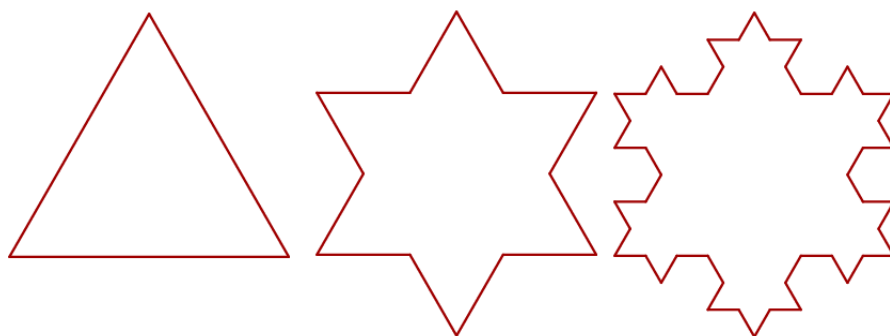


Figura 1: Disegno di K_0 , K_1 e K_2

- (c) Come sarebbe cambiato il risultato se, a ogni passaggio, avessimo costruito sui lati di lunghezza l dei triangoli di lato $\frac{l}{k}$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$?

Curiosità: la figura a cui "tende" il contorno di K_n all'aumentare di n è detta curva di Koch, ed è uno dei più basilari esempi di frattale.

Combinatoria Medium – Esercizi

C1. Dimostrare le seguenti identità con i binomiali:

- per $k < n, m$, $\sum_{d=0}^k \binom{n}{d} \binom{m}{k-d} = \binom{n+m}{k}$
- $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}$

C2. Dimostrare che ogni intero coprimo con 10 ha un multiplo del tipo $11 \dots 11$.

C3. Contare i percorsi in una griglia 17×17 che non passano da $(5, 5)$. E quelli che non passano nemmeno da $(10, 10)$?

C4. Dire quante sono le funzioni a) iniettive b) suriettive c) bigettive (quando è possibile trovarne) da insieme di cardinalità a a insieme di cardinalità b .
Nota : per le suriettive basta trovare una formula, non serve calcolarla.

C5. Per quali n è possibile tassellare una tabella $n \times n$ con tessere formate da 4 quadratini disposti a "T"?

C6. Su una lavagna sono inizialmente scritti i numeri 8, 10, 15. Una mossa consiste nel prendere $\{a, b\}$ scritti sulla lavagna, cancellarli e sostituirli con $\{\frac{3a+4b}{5}, \frac{4a-3b}{5}\}$. È possibile avere sulla lavagna 11, 12, 13 dopo un certo numero di mosse?

Combinatoria Medium – Problemi

Problemi noti

C1. Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo

- per ogni $i = 1, \dots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i ,
- cancella tutti i numeri scritti,
- scrive sulla lavagna i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono 0, 7, 2, 6, 2, dopo la prima mossa saranno 1, 3, 3, 3, 3, dopo la seconda mossa saranno 1, 1, 5, 5, 5, e così via.

- (a) Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.
- (b) Determinare, in funzione di n , il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k -esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.

C2. Maga Magò ha un mazzo di 52 carte, disposte in pila, con il dorso in alto. Magò separa il mazzetto costituito dalle sette carte in cima alla pila, lo capovolge, e lo mette sotto alla pila. Ora tutte le carte sono nuovamente in pila, ma non tutte hanno ancora il dorso in alto: le sette in fondo sono girate al contrario. Magò ripete l'operazione precedente finché non si verifica di nuovo che tutte le carte hanno il dorso in alto. In totale, quanti mazzetti di sette carte ha girato Magò?

Altri problemi

C3. Sia n un intero positivo. Un treno ferma in $2n$ stazioni numerate in ordine. Per ogni coppia di interi i, j con $1 \leq i < j \leq 2n$ è stato prenotato esattamente un posto per il tragitto tra le stazioni i e j . Qual è il numero minimo di posti necessari sul treno affinché non ci siano sovrapposizioni?

C4. Si consideri un 2022-agono coi punti numerati $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ con numeri scritti sui vertici. All'inizio su A_1 e A_3 è scritto il numero 1 e su tutti gli altri vertici è scritto uno 0. Le mosse consentite sono:

- aggiungere 1 a due vertici consecutivi.
- aggiungere 1 a due vertici opposti.

Dimostra che non è possibile riuscire a ottenere 1 su ogni vertice.

- C5.** Dimostrare che una griglia quadrata $2^n \times 2^n$ a cui è stato tolto il quadratino in basso a sinistra può essere sempre tassellata con tessere a forma di "L" formate da tre quadratini.
- C6.** Sui vertici di un n -agone regolare vengono inizialmente messe n caramelle, una in ogni vertice. Una mossa consiste nello scegliere due caramelle e spostarne una nel vertice immediatamente successivo in senso orario e l'altra in quello immediatamente successivo in senso antiorario. Per quali n è possibile portare tutte le caramelle nello stesso vertice?
- C7.** Determinare il più piccolo numero reale $a > 0$ per cui è possibile ricoprire un triangolo equilatero di lato 1 usando 5 triangoli equilateri di lato a .
- C8.** Su una lavagna sono scritti gli interi $2001, 2002, \dots, 2024$. Una mossa consiste in
- scegliere un intero $x \geq 1$ sulla lavagna e cancellarlo;
 - scrivere al suo posto un intero non negativo che deve essere sia minore di x , sia minore o uguale di tutti gli altri interi scritti sulla lavagna in quel momento.

Alice e Bob effettuano mosse alternandosi. Perde chi non può muovere. Chi vince?

- C9.** In una gara ci sono a partecipanti e b giudici, con $b \geq 3$ intero *dispari*. Ogni partecipante ha ricevuto come voti solo "promosso" oppure "bocciato" da ciascun giudice. Supponiamo di sapere che ogni coppia di giudici è d'accordo su al più k partecipanti.
Dimostrare che $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.
- C10.** Su una scacchiera $n \times n$ vengono piazzate alcune pedine seguendo le seguenti condizioni:
- ogni casella che non contiene una pedina condivide un lato con almeno una casella "occupata";
 - data ogni coppia di quadrati che contengono una pedina, esiste una sequenza di quadrati tutti contenenti pedine che le collega e tale che ogni due caselle consecutive della sequenza condividono un lato (ossia l'insieme delle caselle con pedina è connesso).

Dimostrare che sulla scacchiera sono state piazzate almeno $\frac{n^2-2}{3}$ pedine.

- C11.** Sia n un intero positivo. Pietro ha sei scacchiere $n \times n$ che dispone sulle facce di un cubo $n \times n \times n$. Due celle si dicono "allineate" se possono essere connesse da un cammino di celle $a = c_1, c_2, \dots, c_m = b$ tali che tutte le celle consecutive nel cammino abbiano un lato in comune, e c_i

$(i = 2, 3, \dots, m-1)$ abbia in comune un lato con c_{i-1} e il lato opposto con c_{i+1} .

Qual è il numero massimo di torri che puoi mettere sulla scacchiera senza avere due torri allineate?

C12. Hai una griglia 2025×2025 , con righe e colonne numerate da 1 a 2025, con $(1, 1)$ in alto a sinistra. Le caselle di questa griglia possono essere bianche o nere. Una mossa consiste in

- scegliere una casella **nera** (le cui coordinate sono (i, j));
- cambiare colore a tutte le caselle nel sottoquadrato massimo che ha (i, j) come vertice in basso a destra.

Alice e Bob effettuano mosse alternandosi. Perde chi non può muovere.

- Dimostra che il gioco finisce.
- All'inizio, solo la casella $(1000, 1000)$ è nera. Chi vince?
- All'inizio, solo la casella $(1000, 2001)$ è nera. Chi vince?

Geometria Medium – Esercizi

- G1.** Sia ABC un triangolo, denotiamo con M, N ed L i punti medi dei lati BC, AC, AB . Sia H l'ortocentro di ABC e sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC .
- (i) Siano H_A, H_B e H_C i simmetrici di H rispetto ai lati BC, AC, AB . Dimostrare che H_A, H_B e H_C appartengono ad Ω .
- (ii) Siano H'_A, H'_B e H'_C i simmetrici di H rispetto ai punti M, N, L . Dimostrare che H'_A, H'_B e H'_C appartengono ad Ω .
- G2.** Siano Γ_1 e Γ_2 due circonferenze che si intersecano in X e Y . Siano P su Γ_1 e Q su Γ_2 tali che PQ sia tangente a entrambe le circonferenze. Dimostrare che il punto medio di PQ sta su XY .
- G3.** Siano Γ e γ due circonferenze tangenti internamente in P , con γ all'interno di Γ . Sia AB una corda di Γ tangente a γ in un punto T . Dimostrare che la retta PT interseca Γ nel punto medio dell'arco AB non contenente P .
- G4.** Dato un triangolo ABC con ortocentro H , dimostrare che i tre punti medi dei lati, i tre piedi delle altezze e i tre punti medi di HA, HB, HC giacciono tutti su una stessa circonferenza. Questa circonferenza è detta **circonferenza di Feuerbach** oppure **circonferenza dei 9 punti**.
- G5.** Sia ABC un triangolo con ortocentro H , baricentro G e circocentro O . Dimostrare che H, G ed O sono allineati e che inoltre vale $HG = 2GO$. Anche il centro della circonferenza di Feuerbach è allineato con questi punti, la retta che li contiene tutti e 4 si chiama **retta di Eulero**.
- G6.** Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano
- D il piede della bisettrice dell'angolo in A ,
 - E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
 - F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
 - G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC .

Geometria Medium – Problemi

G1. Sia ABC un triangolo, denotiamo con M il punto medio di BC e denotiamo con D, E ed F i piedi delle altezze uscenti rispettivamente da A, B e C . Sia infine H l'ortocentro di ABC .

- (i) Mostrare che i quadrilateri $BCEF$ e $EAFH$ sono ciclici.
- (ii) Mostrare che la retta per A parallela a BC tangente la circonferenza circoscritta a $EAFH$.
- (iii) Mostrare che MF e ME tangono la circonferenza circoscritta a $EAFH$.
- (iv) Dimostrare che H è l'incentro di DEF . Il triangolo DEF si dice **triangolo ortico** del triangolo ABC .

G2. Sia ABC un triangolo tale che, detto H il piede dell'altezza condotta da C , si ha $AH = 3 \cdot HB$. Siano inoltre:

- M il punto medio di AB ;
- N il punto medio di AC ;
- P il punto dal lato opposto di B rispetto alla retta AC tale che $NP = NC$ e $PC = CB$.

Dimostrare che $\widehat{APM} = \widehat{PBA}$.

G3. Sia $ABCD$ un trapezio con base maggiore AB tale che le diagonali AC e BD siano perpendicolari. Sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la retta OB e la retta CD . Dimostrare che

$$BC^2 = CD \cdot CE.$$

G4. Sia ABC un triangolo e siano I il suo incentro e Ω la sua circonferenza circoscritta.

- (i) Sia L il punto di intersezione tra AI ed Ω e sia I_A il simmetrico di I rispetto ad L . Dimostrare che $BICI_A$ è ciclico e che II_A è un diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_A$.
- (ii) Dedurre dal punto precedente che I_A è l' A -excentro di ABC .
- (iii) Sia ω la circonferenza inscritta ad ABC , sia P il punto di tangenza tra ω e BC e sia PQ un diametro di ω . Sia X il punto di intersezione tra la retta AQ e BC . Dimostrare che $BP = CX$ e che X è il punto di tangenza tra Ω_A e BC .

- G5.** Sia $\triangle ABC$ un triangolo: sia Γ la circonferenza circoscritta, O il circocentro e G il baricentro. Supponiamo che GO sia perpendicolare a AG . Sia A' la seconda intersezione di AG con Γ . Sia D l'intersezione dei segmenti CA' e AB , e sia E l'intersezione di BA' e AC . Dimostrare che il circocentro del triangolo $\triangle ADE$ appartiene a Γ .
- G6.** Dato un triangolo acutangolo $\triangle ABC$, sia D il piede dell'altezza uscente da C . La bisettrice dell'angolo $\angle ABC$ interseca CD in E ; detta ω la circonferenza circoscritta al triangolo $\triangle ADE$, sia F il punto in cui la retta BE interseca nuovamente ω . Mostrare che, se $\angle ADF = 45^\circ$, allora la retta CF è tangente a ω .

Teoria dei Numeri Medium – Esercizi

- N1.** Per quali interi n il numero $\frac{n^2+3n-5}{n-2}$ è intero?
- N2.** Per quali interi n il numero $\frac{n^3+5}{n^2-1}$ è intero?
- N3.** Trovare le soluzioni intere di $a + 2b + 10 = 3ab$.
- N4.** Sia $n \in \mathbb{Z}$. Mostrare che 24 divide sempre $n(n^2 - 1)(2n + 5)$
- N5.** Esiste un quadrato perfetto la cui scrittura in base 10 termini con 02? E un cubo perfetto? In generale, esiste una potenza perfetta k -esima, con $k > 1$ (numero della forma n^k , n intero positivo) la cui scrittura in base 10 termini con 02?
- N6.** Mostrare che tutte le potenze di 3 hanno la cifra delle decine pari.
- N7.** Qual è la cifra delle unità di 7^{7^7} ?
- N8.** Trovare tutte le coppie di primi p, q tali che $pq \mid 2^{pq} + 1$.
- N9.** Calcolare 4^{2017} modulo 11.
- N10.** Giorgia, Chiara e Giovanni devono decidere quando incontrarsi per correggere il test finale dell'EGMO Camp. Giorgia è libera una volta ogni sei giorni, a partire da martedì 21. Chiara è libera ogni 15 giorni, a partire da giovedì 30. Giovanni è libero ogni 8 giorni, a partire da venerdì 24. Quando riusciranno a correggere il test? E se invece decidessero di incontrarsi solo Giorgia e Chiara?
- N11.** Esistono 2023 interi consecutivi, ciascuno dei quali divisibile per un cubo perfetto (maggiore di 1)?
- N12.** Trovare le soluzioni intere di $86x + 25y = 1$.
- N13.** Michael ha una cisterna dalla grande capienza e inizialmente vuota e vuole versarci 12 litri d'acqua. Michael dispone però solamente di brocche di due diverse taglie: alcune possono contenere 21 litri d'acqua, altre possono contenerne 18. Non disponendo di modi di misurare la quantità d'acqua che prende, decide di riempire la cisterna solamente travasandone dentro tutta l'acqua di una brocca o prelevandone una brocca piena. Michael può riuscire nel suo intento? Qual è il minimo numero di travasi che deve compiere?
- N14.** Per quali interi n il numero $n^2 + 27n + 91$ è un quadrato perfetto?
- N15.** Risolvere negli interi l'equazione $y^2 = x^2 + 3x + 5$.
- N16.** Per quali interi n si ha $(2n + 3, n + 7) = 1$?
- N17.** Dimostrare che se p è un numero primo e a è un numero naturale, allora $a^2 - p$ non è divisibile per p^2 .

Teoria dei Numeri Medium – Problemi

- N1.** Trovare tutti gli n naturali tali che $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ è un quadrato perfetto.
- N2.** Paolo ha $c > 0$ chicken mcnuggets da impacchettare nei suoi contenitori, e per non sprecare contenitori vorrebbe riempirne un certo numero con la sua esatta capienza di chicken mcnuggets. Paolo dispone solamente di due tipi di contenitori, in numero illimitato, di capienze a e b , entrambe maggiori di 0. Supponiamo che sia $\text{mcd}(a, b) = 1$. Vogliamo aiutare Paolo a dimostrare che può sempre adempiere al suo compito, con la condizione di avere almeno $mn - m - n + 1$ chicken mcnuggets da impacchettare.
- (a) Riformulare il problema in termini di equazioni diofantee. Fissato c , se x è il numero di contenitori di capienza a che Paolo usa e y quello di contenitori di capienza b , scrivere la soluzione generale del problema con x, y interi anche non positivi.
 - (b) Vogliamo ora capire quando ci sono soluzioni positive. Consideriamo il minimo intero positivo x tale che esiste una soluzione (x, y) con y intero. Cosa si può dire su x ? Se esistono soluzioni all'equazione negli interi positivi, come deve essere y ?
 - (c) Caratterizzare ora gli interi c tali che non esistono soluzioni con x, y entrambi maggiori di 0, e trovare il massimo tra tali interi.
- N3.** Determinare per quali interi positivi n vale $n = d(n)^2$, dove $d(n)$ è il numero di divisori positivi di n .
- N4.** Dimostrare il teorema di Wilson: se p è un numero primo, allora
- $$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$
- N5.** Dati i, j naturali, dimostrare che $2024^i - 1$ divide $2024^j - 1$ se e solo se i divide j
- N6.** Siano a, b interi positivi strettamente maggiori di 1 e sia $f(n)$ un polinomio a coefficienti interi. Si sa che esiste un intero $N > 0$ tale che $b^n \mid a^n + f(n)$ per ogni $n > N$. Dimostrare che $b \mid a$ e $f(n)$ è il polinomio nullo.