

EGMO Camp 2026 – Problemi delle sessioni Basic

7-10 novembre 2025

EGMO Camp 2026 – Problemi noti

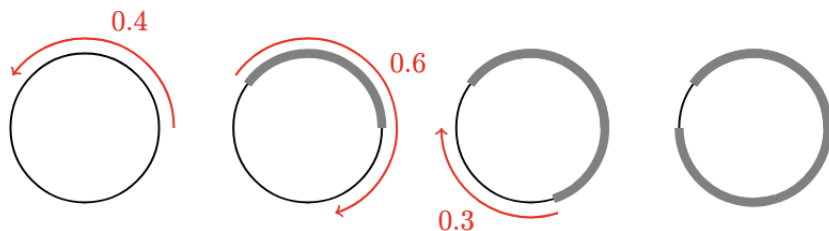
- A1.** Jack scrive sulla lavagna il numero $x_0 = 2024^{2024}$. Successivamente lo cancella e scrive al suo posto $x_1 = |x_0 - \pi|$. Poi cancella x_1 e scrive al suo posto $x_2 = |x_1 - \pi|$, e così via. In altri termini, ad ogni mossa Jack cancella il numero x_n scritto precedentemente e lo sostituisce con $x_{n+1} = |x_n - \pi|$. Dimostrare che esiste un valore di n tale che $x_{n+2} = x_n$.
- A2.** Due interi distinti u e v sono scritti sulla lavagna. Eseguiamo una sequenza di mosse. Ad ogni mossa facciamo una delle due operazioni seguenti:
- (a) Dati a e b interi distinti scritti sulla lavagna, possiamo scrivere $a + b$ sulla lavagna, se non è già presente.
 - (b) Dati a, b e c tre interi distinti scritti sulla lavagna, se un intero x soddisfa $ax^2 + bx + c = 0$ possiamo scrivere x sulla lavagna, se non è già presente.

Determinare tutte le coppie di numeri iniziali (u, v) a partire dalle quali ogni intero può essere scritto sulla lavagna dopo un numero finito di mosse.

- C1.** Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo
- per ogni $i = 1, \dots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i ,
 - cancella tutti i numeri scritti,
 - scrive sulla lavagna i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono 0, 7, 2, 6, 2, dopo la prima mossa saranno 1, 3, 3, 3, 3, dopo la seconda mossa saranno 1, 1, 5, 5, 5, e così via.

- (a) Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.
 - (b) Determinare, in funzione di n , il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k -esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.
- C2.** La lumachina Turbo è inizialmente ferma in un punto di una circonferenza di lunghezza 1. Data una sequenza infinita di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \dots$, Turbo striscia successivamente per archi di lunghezza $c_1, c_2, c_3, \dots$ attorno alla circonferenza, ogni volta decidendo se strisciare in verso orario o antiorario. Ad esempio, se la sequenza $c_1, c_2, c_3, \dots$ fosse 0.4, 0.6, 0.3, ... Turbo potrebbe iniziare a strisciare nel modo seguente:



Si determini la più grande costante $C > 0$ con la seguente proprietà: per ogni sequenza di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \dots$ con $c_i < C$ per ogni i , Turbo può (dopo aver studiato la sequenza) assicurarsi che esiste un punto sulla circonferenza, che non visiterà mai, e attraverso il quale non striscerà mai.

G1. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano:

- D il piede della bisettrice dell'angolo in A ,
- E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
- F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
- G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC .

G2. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $BC < AB$ e $BC < CA$. Sia P un punto sul segmento AB e Q un punto sul segmento AC tali che $P \neq B$, $Q \neq C$ e $BQ = BC = CP$. Sia T il circocentro del triangolo APQ , H l'ortocentro del triangolo ABC e S il punto d'intersezione delle rette BQ e CP . Dimostrare che i punti T, H e S sono allineati.

N1. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che se $p + q^2$ è un quadrato perfetto allora $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto per nessun intero positivo n .

N2. Fissato un intero strettamente positivo N , siano $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ tutti gli interi strettamente positivi minori di N e coprimi con N . Determinare tutti gli $N \geq 3$ tali che:

$$\text{MCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

per ogni $1 \leq i \leq m - 1$.

I problemi sono, nell'ordine: Cesenatico 1/2024, EGMO 1/2024, Cesenatico 2/2023, EGMO 4/2023, Cesenatico 2/2022, EGMO 1/2022, Cesenatico 2/2019, EGMO 1/2025.

Algebra Basic – Eserciziario della Lezione

Identità algebriche

A1. Dimostrare le seguenti scomposizioni notevoli:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

- per ogni $n \in \mathbb{N}$ **dispari** vale:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + (-1)^{n-2}xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1})$$

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

A2. Se $x + \frac{1}{x} = 4$, quanto vale $x^3 + \frac{1}{x^3}$?

A3. (Eserciziario Senior) Se $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$?

A4. (Eserciziario Senior) Dati a, b, c, d interi qualsiasi, mostrare che

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

può essere scritto come somma di due quadrati interi.

A5. Mostrare che: $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$. Questa equazione è chiamata *identità di Sophie Germain*. Usarla per dimostrare che:

- esistono infiniti $a \in \mathbb{N}$ tali che $n^4 + a$ non è primo
- $n^4 + 4^n$ è primo se e solo se $n = 1$
- $2^{2^n-2} + 1$ non è primo
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n^{12} + 64$ può essere scritto come prodotto di 4 interi maggiori di 1

A6. Dimostrare che se a, b, c sono numeri reali tali che $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ allora $a = b = c$.

Successioni

- A7.** (Giochi di Archimede, 2011) Gabriella scrive una successione di 10 numeri (eventualmente negativi), in modo che ciascun numero della successione, dal terzo in poi, sia la somma dei due che la precedono. Il primo numero della successione è 34 mentre l'ultimo è 0. Quanto vale la somma di tutti i numeri della successione?
- A8.** Siano $x_1, \dots, x_{201}$ tali che $x_1^3 + x_2 = x_2^3 + x_3 = \dots = x_{101}^3 + x_1$. Dimostrare che $x_1 = x_2 = \dots = x_{101}$.
- A9.** Sia data la successione $\{a_n\}$ tale che $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ per ogni n e $a_{1000} = 2024 = a_{996} - 1$. Determinare a_0 .
- A10.** (TF 2024) I 201 interi positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{200}$ sono scritti in questo ordine. È noto che $a_0 = a_{200} = 19999$. Sia k un intero positivo tale che:

$$\frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} - a_i = k \quad \text{per ogni } 0 < i < 200.$$

Trovare a_{199} .

Polinomi

- A11.** (TF 2025) Trovare tutti i $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(x^2) + Q(x^3) = x^5$.
- A12.** Sia $P(x) = (5x^{30} - 63x^{12} + 60)^{2024} - (5x^{30} + 63x^{12} + 60)^{289}$. Quanto vale la somma dei coefficienti di $P(x)$?
- A13.** (Eserciziario Senior) Sia α una radice reale del polinomio $x^3 - x + 1$. Quanto vale $\alpha^9 + 3\alpha^6 + 2\alpha^3$?
- A14.** Sia $p(x) = x^3 - 15x^2 + 17x + 11$ e siano α, β, γ le sue tre radici reali (che sappiamo esistere). Quanto valgono $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$?
- A15.** $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado al più 2024 è tale che $P(n) = 2^n$ per $n = 0, 1, \dots, 2024$. Trovare $P(2025)$.
- A16.** Trovare tutti i $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $(x - 3)P(x) = xP(x - 1)$.
- A17.** Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tale che $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(5) > 5$. Qual è il valore minimo che può assumere $p(5)$?
- A18.** Il polinomio $p(x)$, di grado 42, assume il valore 0 nei primi 21 numeri primi dispari e nei loro reciproci. Quanto vale il rapporto $p(2)/p(1/2)$?

Algebra – Problemi noti

- A1.** Jack scrive sulla lavagna il numero $x_0 = 2024^{2024}$. Successivamente lo cancella e scrive al suo posto $x_1 = |x_0 - \pi|$. Poi cancella x_1 e scrive al suo posto $x_2 = |x_1 - \pi|$, e così via. In altri termini, ad ogni mossa Jack cancella il numero x_n scritto precedentemente e lo sostituisce con $x_{n+1} = |x_n - \pi|$. Dimostrare che esiste un valore di n tale che $x_{n+2} = x_n$.
- A2.** Due interi distinti u e v sono scritti sulla lavagna. Eseguiamo una sequenza di mosse. Ad ogni mossa facciamo una delle due operazioni seguenti:
- (a) Dati a e b interi distinti scritti sulla lavagna, possiamo scrivere $a + b$ sulla lavagna, se non è già presente.
 - (b) Dati a, b e c tre interi distinti scritti sulla lavagna, se un intero x soddisfa $ax^2 + bx + c = 0$ possiamo scrivere x sulla lavagna, se non è già presente.

Determinare tutte le coppie di numeri iniziali (u, v) a partire dalle quali ogni intero può essere scritto sulla lavagna dopo un numero finito di mosse.

Esercizi extra

- A3.** Trovare tutti i numeri reali (x, y) che soddisfano $x^2 + y^4 + 10 = 6y^2 - 2x$
- A4.** Siano α, β, γ le radici del polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$. Trovare un polinomio (di terzo grado) le cui radici sono $\alpha\beta, \beta\gamma, \alpha\gamma$.
- A5.** Sia $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ e supponiamo che abbia quattro radici reali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Allora:
- $a = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$
 - $b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$
 - $c = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$
 - $d = \alpha\beta\gamma\delta$

Formalizzare poi (usando il principio di induzione) le formule di Viète per polinomi di grado n qualsiasi.

- A6.** Dato $p(x) = x^4 + 6x^2 - 4x + 1$ dimostra che $p(x^4)$ può essere scritto come prodotto di due polinomi a coefficienti interi con grado ≥ 1 .
- A7.** Trovare il minimo n per cui $p(x) = x^{n-4} + 4n$ può essere scritto come prodotto di 4 polinomi a coefficienti interi con grado ≥ 1 .

Combinatoria Basic – Esercizi

Conteggi

- C1.** La Pimpa e i suoi 303 amici vogliono prendersi per mano e formare un girotondo molto grande. Consideriamo due possibili girotondi diversi se esiste almeno una coppia di persone che si tiene per mano in un caso, ma non nell'altro. Quanti sono i possibili girotondi diversi?
- C2.** Consideriamo un intero positivo n e la sua fattorizzazione $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Quanti sono i divisori di n ?
- C3.** Quanti sono gli anagrammi della parole: EGMOISTE, COMBINATORIA, MERENDA.
- C4.** Quanti sono i sottoinsiemi di $\{0, 1, 2, 3, \dots, 2025\}$ che hanno un numero dispari di elementi?
- C5.** Quanti sono i percorsi sui segmenti di una griglia $n \times m$ che partono da $(0,0)$ e arrivano a (m,n) passando per il punto (h,k) (che $h \leq m$ e $k \leq n$)?
- C6.** Dati n, k interi positivi, in quanti modi è possibile scrivere n come somma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ con gli a_i interi positivi?
- C7.** Quante sono le coppie ordinate (A, B) di sottoinsiemi di $\{1, 2, \dots, n\}$ tali che ci sia esattamente un elemento nell'intersezione di A e B ?
- C8.** Dimostra le seguenti identità binomiali:

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pigeonhole e induzione

- C9.** Siano dati 11 numeri estratti casualmente da $\{1, 2, \dots, 20\}$. Dimostrare che è possibile sceglierne due tra questi in modo tale che la loro differenza sia uguale a 5.
- C10.** Dimostrare che, in un gruppo di n persone, ce ne sono almeno due che hanno lo stesso numero di amici all'interno del gruppo.
- C11.** I vertici di un poligono convesso sono colorati con almeno 3 colori diversi in modo tale che non ci siano due vertici consecutivi con lo stesso colore. Dimostrare che si può dividere il poligono in triangoli con diagonali che non si intersecano tra loro e che collegano vertici di colori diversi.

- C12.** Posso dire che esistono due persone con lo stesso numero di capelli in testa?
- C13.** Posso dire che esistono 100 persone con lo stesso numero di capelli in testa?
- C14.** Posso dire che esistono due numeri diversi n, m per cui esistono due persone con n capelli in testa e due persone con m capelli in testa?
- C15.** Una classe è composta da 25 persone. Mostra che 3 di queste sono nate nello stesso mese.
- C16.** Un gruppo di 4 amiche va al cinema ogni venerdì per un anno e prende sempre 4 posti adiacenti. Mostra che esiste almeno una disposizione delle amiche nei posti che si ripete 3 volte.
- C17.** Un gruppo di 7 amiche va al cinema ogni venerdì per un anno, ma ogni settimana esattamente 3 delle amiche hanno un impegno e non vengono. Mostra che ci sono due venerdì diversi dove al cinema vanno le stesse 4 amiche.
- C18.** Alle EGMO 2025 c'erano 219 partecipanti e il punteggio massimo era 42. Mostra che ci sono 6 concorrenti che hanno fatto lo stesso punteggio cumulativo.
- C19.** Alle EGMO 2025 c'erano 219 partecipanti, 6 problemi e il punteggio massimo per ogni problema era 7. Mostra che ci sono 4 concorrenti che hanno fatto lo stesso punteggio sui problemi 3 e 5.
- C20.** Consideriamo i sottoinsiemi di $\{1, \dots, 10\}$ diversi dall'insieme vuoto. Dimostra che comunque se ne scelgano 63 a caso due di questi hanno la stessa somma.
- C21.** Dato un quadrato di lato 2 mostrare che scegliendo 5 punti casuali all'interno ce ne sono almeno due che hanno distanza minore di $\sqrt{2}$.
- C22.** Data una linea lunga 10 stimare il massimo numero di punti che si possono mettere su questa senza che due di questi siano a distanza minore di 2.
- C23.** Dato un cerchio di raggio 5 stimare il massimo numero di punti che si possono mettere su questo senza che due di questi siano a distanza minore di 2.
- C24.** Mostrare che in un torneo di tennis a eliminazione diretta (chi perde una partita abbandona il torneo) il numero di partite giocate dipende solo dal numero di persone che partecipano e non dalla struttura del torneo.

- C25.** I numeri di Fibonacci sono una lista definita in questo modo: il primo è 1, il secondo è 2 e ciascuno dei successivi numeri è la somma dei due immediatamente precedenti (la sequenza comincia con $1, 2, 3, 5 \dots$). Dimostra che il numero di modi di ricoprire una striscia $1 \times n$ con tessere 1×1 e 1×2 è uguale all' n -esimo numero di Fibonacci.
- C26.** Dimostra che i modi di disporre n persone in una fila sono esattamente $n!$ usando il principio di induzione.
- C27.** Consideriamo il gioco seguente: ci sono 3 paletti con una colonna di n dischi bucati di diametro decrescente infilati nel paletto sinistro in modo che il più grande sia in fondo e il più piccolo in cima. Una mossa consiste nel prendere il disco più in alto di una torre su un paletto e infilarlo su un altro paletto che contiene solo dischi più grandi oppure nessun disco, ponendolo in cima. Mostrare che $2^n - 1$ mosse sono sufficienti per spostare tutta la torre iniziale sul terzo paletto.
- C28.** Mostrare che n punti distinti su una retta la dividono in $n + 1$ regioni (eventualmente infinite, cioè segmenti o semirette)
- C29.** Mostrare che n rette distinte in un piano che non si intersecano a tre a tre lo dividono in $\frac{n^2+n+2}{2}$ regioni (anche infinite)
- C30.** Mostrare che in un poligono con n lati la somma degli angoli interni è $(n-2)$ volte la somma degli angoli interni di un triangolo.

Combinatoria Basic – Problemi

Problemi noti

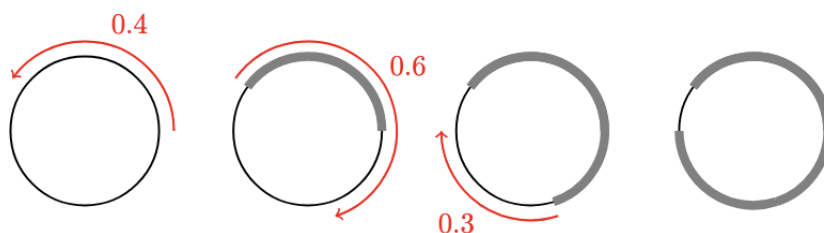
C1. Sia n un intero positivo. Su una lavagna Bobo scrive n interi maggiori o uguali a zero. Successivamente, ad ogni mossa Bobo

- per ogni $i = 1, \dots, n$ calcola il numero a_i di interi scritti in quel momento sulla lavagna e minori o uguali a i ,
- cancella tutti i numeri scritti,
- scrive sulla lavagna i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ad esempio, se $n = 5$ e i numeri scritti inizialmente sono 0, 7, 2, 6, 2, dopo la prima mossa saranno 1, 3, 3, 3, 3, dopo la seconda mossa saranno 1, 1, 5, 5, 5, e così via.

- Dimostrare che, per ogni n e per ogni configurazione iniziale, da un certo punto in poi i numeri scritti sulla lavagna non cambiano più.
- Determinare, in funzione di n , il minimo intero positivo k con la proprietà che, per qualsiasi configurazione iniziale, le mosse dalla k -esima in poi non cambiano più i numeri scritti sulla lavagna.

C2. La lumachina Turbo è inizialmente ferma in un punto di una circonferenza di lunghezza 1. Data una sequenza infinita di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \dots$, Turbo striscia successivamente per archi di lunghezza $c_1, c_2, c_3, \dots$ attorno alla circonferenza, ogni volta decidendo se strisciare in verso orario o antiorario. Ad esempio, se la sequenza $c_1, c_2, c_3, \dots$ fosse 0.4, 0.6, 0.3, ... Turbo potrebbe iniziare a strisciare nel modo seguente:



Si determini la più grande costante $C > 0$ con la seguente proprietà: per ogni sequenza di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \dots$ con $c_i < C$ per ogni i , Turbo può (dopo aver studiato la sequenza) assicurarsi che esiste un punto sulla circonferenza, che non visiterà mai, e attraverso il quale non striscerà mai.

Altri problemi

- C3.** Date N persone, alcune tra di esse si stringono la mano. Considera per ogni persona il numero di persone a cui questa ha stretto la mano. Dimostra che la somma di questi numeri è pari.
- C4.** Ogni casella di una griglia 4×7 è colorata di bianco o di nero. Dimostrare che esistono 4 caselle dello stesso colore sui vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. La cosa è vera anche per una griglia 4×6 ?
- C5.** Dimostrare che, dato un numero intero $n \geq 6$, è sempre possibile spezzare un quadrato di lato 1 in n quadrati (non necessariamente uguali).
- C6.** Un sottoinsieme S di $\{1, 2, \dots, n\}$ è *livornese* se non esistono quattro elementi distinti $a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$ tali che $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Stima dall'alto e dal basso la massima cardinalità di un sottoinsieme livornese.
- C7.** Si scrivono su una lavagna i numeri da 1 a n e si effettua più volte la seguente mossa: presi due numeri a e b sulla lavagna, si cancellano e si scrive $|a - b|$, fino a quando non rimane un solo numero. Questo numero è pari o dispari?
- C8.** Consideriamo un sottoinsieme S di dieci elementi di $\{1, \dots, 99\}$ diversi dall'insieme vuoto. Dimostra che esistono due sottoinsiemi di S senza elementi in comune che hanno la stessa somma.
- C9.** Date 7 città sul nostro pianeta (che immaginiamo sferico) mostrare che esiste un punto dello spazio da cui una persona su una stazione spaziale può vederne 5 contemporaneamente.
- C10.** Data una sfera di raggio 5 stimare il massimo numero di punti che si possono mettere su questa senza che due di questi siano a distanza minore di 2.
- C11.** Mostrare che n piani nello spazio lo dividono al massimo in $\frac{n^3+5n+6}{6}$ regioni
- C12.** Mostrare che togliendo un quadratino qualsiasi da una scacchiera $2^n \times 2^n$ la scacchiera bucata risultante può essere coperta con tessere di 3 caselle a forma di L .
- C13.** Consideriamo i 5 solidi platonici (alcune forme tridimensionali con facce formate da poligoni regolari tutte uguali che si incontrano in numero uguale a ogni vertice, cioè il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro). Sia v il numero di vertici di un solido platonico, e il numero di spigoli, f il numero di facce. Mostrare che $v - f + e = 2$ per ogni solido platonico.
- C14.** In una griglia infinita ogni casella è colorata di rosso, verde o blu. Mostrare che c'è un rettangolo con i vertici dello stesso colore.

Geometria Basic – Problemi

- G1.** Sono dati un quadrilatero ed un punto M all'interno del quadrilatero. Dimostrare che i simmetrici del punto M rispetto ai punti medi dei lati del quadrilatero sono vertici di un parallelogramma.
- G2.** Dati due segmenti AB e CD che si intersecano in un punto P , dimostrare che $ACBD$ è ciclico se e solo se $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.
- G3.** Sia ABC un triangolo, denotiamo con M, N ed L i punti medi dei lati BC, AC, AB . Sia H l'ortocentro di ABC e sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC .
- (i) Siano H_A, H_B e H_C i simmetrici di H rispetto ai lati BC, AC, AB . Dimostrare che H_A, H_B e H_C appartengono ad Ω .
 - (ii) Siano H'_A, H'_B e H'_C i simmetrici di H rispetto ai punti M, N, L . Dimostrare che H'_A, H'_B e H'_C appartengono ad Ω .
- G4.** Sia ABC un triangolo, denotiamo con M il punto medio di BC e denotiamo con D, E ed F i piedi delle altezze uscenti rispettivamente da A, B e C . Sia infine H l'ortocentro di ABC .
- (i) Mostrare che i quadrilateri $BCEF$ e $EAFH$ sono ciclici.
 - (ii) Mostrare che la retta per A parallela a BC tangente la circonferenza circoscritta a $EAFH$.
 - (iii) Mostrare che MF e ME tangono la circonferenza circoscritta a $EAFH$.
 - (iv) Dimostrare che H è l'incentro di DEF . Il triangolo DEF si dice **triangolo ortico** del triangolo ABC .
- G5.** Sia ABC un triangolo, con incentro I e circonferenza circoscritta Ω .
- (i) Sia L il punto di intersezione tra AI ed Ω e sia I_A il simmetrico di I rispetto ad L . Dimostrare che $BICI_A$ è ciclico e che II_A è un diametro della circonferenza circoscritta a $BICI_A$.
 - (ii) Dedurre dal punto precedente che I_A è l' A -excentro di ABC .
 - (iii) Siano I_B e I_C gli altri excentri del triangolo ABC . Dimostrare che ABC è il triangolo ortico di $I_AI_BI_C$.
- G6.** Sia $ABCDEF$ un esagono inscritto in una circonferenza e tale che $AB = BC, CD = DE$ ed $EF = AF$. Dimostrare che i segmenti AD, BE e CF concorrono.
- G7.** Sia I l'incentro del triangolo acutangolo ABC . Le rette BI e CI intersecano la circonferenza circoscritta al triangolo ABC nei punti S e T , rispettivamente. Il segmento ST interseca i lati AB e AC nei punti K ed L , rispettivamente. Dimostrare che il quadrilatero $AKIL$ è un rombo.

Problemi noti:

G8. Sia ABC un triangolo acutangolo con $AB < AC$. Siano

- D il piede della bisettrice dell'angolo in A ,
- E il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $AB = AE$,
- F il punto del segmento BC (diverso da B) tale che $BD = DF$,
- G il punto del segmento AC tale che $AB = AG$.

Dimostrare che la circonferenza circoscritta al triangolo EFG è tangente alla retta AC .

G9. Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $BC < AB$ e $BC < CA$. Sia P un punto sul segmento AB e Q un punto sul segmento AC tali che $P \neq B$, $Q \neq C$ e $BQ = BC = CP$. Sia T il circocentro del triangolo APQ , H l'ortocentro del triangolo ABC e S il punto d'intersezione delle rette BQ e CP . Dimostrare che i punti T , H e S sono allineati.

Teoria dei Numeri Basic – Esercizi

Induzione

N1. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ vale:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

N2. Determinare tutti gli interi n tali che $n^2 \leq 2^n$.

N3. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$ (assumendo $x \geq -1$) vale: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

N4. Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari $1 + 3 + \dots + (2n+1)$ è uguale ad n^2 .

Divisibilità

N5. Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa; p denota un numero primo, a, b generici numeri interi.

- Se $p \mid ab$ allora $p \mid a$ o $p \mid b$
- Se $p^2 \mid ab$ allora $p^2 \mid a$ o $p^2 \mid b$
- Se $p \mid a - b$, allora $p \mid a + b$
- Se $p^2 \mid a^3$ allora $p^6 \mid a^6$
- Se $p^2 \mid b^3$ allora $p^2 \mid b$
- Se $p \mid \text{MCD}(a, b)$ allora $p^2 \mid \text{MCD}(a^2, ab)$.

N6. Determinare il più piccolo intero positivo a per cui $2002a + 3$ è multiplo di 59.

N7. Il prodotto di due numeri naturali è 2160. Il loro massimo comune divisore è dispari e maggiore di 1. Determinare il valore del loro minimo comune multiplo.

MCD e Algoritmo di Euclide

N8. Trovare tutte le coppie (a, b) tali che $a + b = 63$ e $\text{mcm}(a, b) = 962$.

N9. Per ogni intero positivo n , sia d_n il massimo comun divisore tra $100 + n^2$ e $100 + (n+1)^2$. Determinare il massimo valore possibile per d_n .

N10. Trovare tutti i primi p tali che $5p + 49$ sia un quadrato perfetto.

Congruenze

- N11.** Tutti sanno che l'espressione decimale del fattoriale di 19 è la seguente:
 $19! = 121.6x5.100.40y.832.z00$, dove x, y e z sono cifre incognite. Determinare $x^2 + y^3 + z^4$.
- N12.** Il numero $1^{2025} + 2^{2025} + 3^{2025} + \dots + 2025^{2025}$ è divisibile per 2025?
- N13.** Dimostrare che per ogni primo $p \neq 2, 5$ esiste un intero positivo m per cui il numero $11 \dots 11$ con m cifre è divisibile per p .

Teoria dei Numeri Basic – Problemi

N1. Benedetta e Isabella giocano al seguente gioco: data una pila di n monete tolgono a turno un numero intero di monete compreso tra 1 e 6, partendo da Benedetta. Vince chi toglie l'ultima moneta dalla pila: chi di loro ha una strategia vincente, al variare di n ?

N2. Dimostrare che la frazione
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$
 è ridotta ai minimi termini

N3. Trovare tutti gli interi positivi n tali che:

- (a) $n^3 - 3n^2 + n$ sia un quadrato perfetto.
- (b) $n^3 - 5n^2 + 9n - 6$ sia un quadrato perfetto.

N4. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi e M un suo sottoinsieme di almeno due elementi con la seguente proprietà: preso un qualunque sottoinsieme $A \subseteq M$ costruiamo l'intero n_A come prodotto dei primi in A a cui sottraiamo 1

$$n_A = -1 + \prod_{p_i \in A} p_i,$$

e chiediamo che qualunque divisore primo di n_A sia anch'esso contenuto in M . Dimostrare che $M = \mathbb{P}$.

N5. Gli interi positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ soddisfano

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Dimostrare che almeno uno dei numeri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ è divisibile per 2^{2020} .

Problemi noti:

N6. Siano p, q numeri primi. Dimostrare che, se $p + q^2$ è un quadrato perfetto, allora il numero $p^2 + q^n$ non è un quadrato perfetto per nessun intero positivo n .

N7. Fissato un intero strettamente positivo N , siano $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ tutti gli interi strettamente positivi minori di N e coprimi con N . Determinare tutti gli $N \geq 3$ tali che

$$\text{MCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

per ogni $1 \leq i \leq m-1$.

Per $\text{MCD}(a, b)$ si intende il maggiore intero positivo che divide sia a che b . Gli interi a e b sono coprimi se $\text{MCD}(a, b) = 1$.